FONCTION CARACTÉRISTIQUE EMPIRIQUE (F3)

(22 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Un calcul de fonction caractéristique basé sur la **loi empirique** conduit à la **fonction caractéristique empirique**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $X : \Omega \mapsto \mathbf{R}^N$ un **échantillon aléatoire**.

On appelle **fonction caractéristique empirique** de X la **fonction caractéristique** associée à la loi empirique $P_N = N^{-1} \sum_n \delta_{X(n)}$, ie (cf **transformation de FOURIER rapide**) :

$$(1) \quad \varphi_N(t) = \int e^{itx} dP_N(x) = N^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N \exp(it X_n),$$

où $X(n)$ désigne X_n ($n = 1, \dots, N$).

La définition s'étend à un échantillon aléatoire vectoriel, ie tq $X : \Omega \mapsto M_{NK}(\mathbf{R})$:

$$(1)' \quad \varphi_N(t) = \int e^{it'x} dP_N(x) = N^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N \exp(it' X_n),$$

où X_n est, $\forall n = 1, \dots, N$, la n -ième ligne de la (N,K) -**matrice** aléatoire X , et où $'$ désigne la transposition.

(ii) Ce qui précède vaut, en particulier, lorsque X est un **échantillon iid**, ie lorsque X_n est, $\forall n = 1, \dots, N$, la **copie** d'une **variable parente** donnée ξ .

(iii) La fonction φ_N possède les propriétés relatives aux fc. Les moments associés sont ne sont autres que les **moments empiriques**.

Lorsque $K = 1$, $E \xi = 0$, $V \xi = 1$, que c_{nN} désigne le n -ième **coefficient de FOURIER** (empirique) associé à (1) (cf **série de FOURIER**), et que Π_N désigne la **loi** du **vecteur aléatoire** $c_N = N^{-1/2} (c_{1N}, \dots, c_{NN})'$, on établit, sous certaines hypothèses, la **convergence en loi** suivante :

$$(2) \quad \Pi_N \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(u + iv), \quad \text{où } (u, v)' \sim \mathcal{N}_2(0, I_2 / 2) \text{ (loi normale).}$$