FONCTION D'ENSEMBLE (A5)
(01 / 12 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **fonction d'ensemble(s)** est une fonction dont les arguments sont des **parties** d'un **ensemble** donné.

(i) Soit E et F deux **ensembles** et $\mathcal{C}$ une **famille** non vide de parties de E.

On appelle **fonction d'ensemble**, ou **fonction d'ensembles**, toute **application** f : $\mathcal{C} \mapsto$ F.

En particulier, lorsque F = **R**, on dit que f est une **fonction d'ensemble finie**.

S'il existe un nombre fini K $\in$ **R** tq :

(1) $|f(A)| \leq K, \quad \forall A \in \mathcal{C}$,

on dit que f est une **fonction d'ensemble bornée**.

Si toute partie A $\in \mathcal{C}$ est tq il existe une **suite** $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties de $\mathcal{C}$ vérifiant :

(2) $A = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et $f(A_n) \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$,

(ie f est finie sur les parties A_n , ce qui se note aussi $f(A_n) < \infty$), on dit que f est une **fonction d'ensemble sigma-finie**, ou une f**onction d'ensemble σ-finie**, (sur la famille $\mathcal{C}$).

(ii) Ainsi, une **mesure abstraite** ou une **mesure de probabilité** est une fonction d'ensemble : f est alors plutôt notée μ ou P (cf **théorie de la mesure**, **calcul des probabilités**).

(iii) Une **fonction d'ensemble** f est dite (cf aussi **continuité**, **application continue**) :

(a) **continue inférieurement** ssi :

$(3)_a$ $f(\lim_n A_n) = \lim_n f(A_n)$,

pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ croissante (ie tq $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$) tq il existe N $\in$ **N** vérifiant $n \geq N \Rightarrow f(A_n) < \infty$.

(b) **continue supérieurement** ssi :

$(3)_b$ $f(\lim_n A_n) = \lim_n f(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ décroissante (ie tq $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall$ n $\in$ **N**) tq il existe N $\in$ **N** vérifiant $n \geq N \Rightarrow f(A_n) < \infty$.

(c) **continue** si f est continue inférieurement et supérieurement.

Si $\lim_n A_n = A_\infty$, on dit que f est continue en A_∞ .