FONCTION D'INFORMATION (G6)
(01 / 12 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbf{R}$ une **fonction numérique** et $C = \{(x, y) \in [0, 1[\times [0, 1[: x + y \leq 1\}$.

Une **fonction d'information** peut se définir comme fonction f vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) l'**équation fondamentale de l'information**, ie :

(1) $f(x) + (1 - x) . f\{(1 - x)^{-1} y\} = f(y) + (1 - y) . f\{(1 - y)^{-1} x\}, \quad \forall (x, y) \in C$;

(b) les **conditions de normalisation** :

(2) $f(1/2) = 1,$
$f(1) = f(0).$

L'**équation fonctionnelle** (1), symétrique en (x, y), intervient notamment dans la **théorie de l'information** statistique (cf **information statistique**).

(ii) Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un **espace probabilisé** et si $A \in \mathcal{T}$, on fait souvent l'hypothèse que l'information I (A) contenue dans (ou apportée par) l'**événement** A ne dépend que de P (A) à travers une fonction d'information tq la fonction f précédente, ie :

(3) $I(A) = f(P(A)).$

Si $B \in \mathcal{T}$ est tq $P(B) > 0$ et si $(B, \mathcal{T}_B, P_B)$ est la **restriction** de l'espace $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à l'évènement B, on appelle **information relative** de A sachant B l'information apportée par l'événement $A \in \mathcal{T}_B$ pr à B, ie (par définition) :

(4) $I(A / B) = P(B) . f(P(A / B)),$

dont la valeur est étendue à 0 si P (B) = 0.

On appelle **information apportée par le couple** (A, B), supposé disjoint ($A \cap B = \emptyset$), la quantité :

(5) $I(A, B) = I(A) + I(B / A^c).$

Cette quantité vérifie la propriété de symétrie I (A, B) = I (B, A).

Par suite, on montre que :

(a) $I(A) = 1 \Rightarrow P(A) = 1/2$;

(b) $I(\Omega) = I(\varnothing)$.