

FONCTION DE HEAVYSIDE (A10, C5, G, H, I)

(21 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) On appelle **fonction de O. HEAVYSIDE** à l'origine la fonction numérique $u : \mathbf{R} \mapsto \{0,1\}$ définie par :

$$(1) \quad u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction u , aussi notée H , n'est autre que la **fonction indicatrice** $\mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}$ de l'ensemble $\mathbf{R}_+$, ie : $u = \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}$.

On appelle **fonction de HEAVYSIDE** au point $a \in \mathbf{R}$ la fonction $u_a : \mathbf{R} \mapsto \{0,1\}$ définie par :

$$(2) \quad u_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{si } x < a. \end{cases}$$

On a donc $u_a = \mathbf{1}_{[a, +\infty[}$. Cette fonction est aussi notée H_a .

(ii) La fonction de HEAVYSIDE vérifie les propriétés suivantes :

$$(a) \quad u_0 = u ;$$

(b) si $\tau_a : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est la **translation** d'amplitude (ou de pas) $a \in \mathbf{R}$ dans l'ensemble $\mathbf{R}$, ie si :

$$(3) \quad x \in \mathbf{R} \mapsto \tau_a(x) = x + a,$$

on montre que $u_a = u_0 \circ \tau_{-a} = u \circ \tau_{-a}$;

$$(c) \quad \forall a \in \mathbf{R}, u(x - a) = 1 - u(a - x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

(iii) La fonction de HEAVYSIDE a été définie comme fonction continue à droite $H_+ = u$ selon (1). Elle est parfois définie comme fonction continue à gauche H_- , selon :

$$(4) \quad H_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(iv) En **Statistique**, on assimile souvent la fonction de HEAVYSIDE H_a à une **fonction de répartition** dont la **loi de probabilité** associée est la **loi de DIRAC** δ_a :

$$(5) \quad H_a(x) = \delta_a([-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

(v) Les définitions s'étendent au cas multidimensionnel selon :

$$(6) \quad H_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R_K(a), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $R_K(a) = \prod_k]-\infty, a_k]$ et $a = (a_1, \dots, a_K) \in \mathbf{R}^K$.

(vi) La fonction de HEAVYSIDE est parfois appelée **fonction de saut élémentaire**, ou **fonction de comptage élémentaire**.

Elle sert dans divers **contextes** comme moyen de calcul ou de représentation commode : fr, fonction de comptage (cf aussi **mesure de comptage**, **processus de comptage**, **variable de comptage**), définition de **statistiques de test** non paramétriques (cf **test non paramétrique**), etc.