

FONCTION DE RIEMANN (A10, C7)

(21 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **fonction de RIEMANN** est une fonction spéciale parfois utilisée en **calcul des probabilités**.

(i) On appelle **fonction de G.F.B. RIEMANN réelle** la fonction $\zeta : \mathbf{R}^*_+ \mapsto \mathbf{R}^*_+$ définie par (fonction ζ ou « zeta ») :

$$(1) \quad \zeta(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n^{-x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^*_+.$$

On montre que :

$$(2) \quad \zeta(x) \cdot \Gamma(x) = \int_{\mathbf{R}^+} (e^u - 1)^{-1} u^{x-1} du, \quad \forall x \in \mathbf{R}^*,$$

où Γ désigne la **fonction gamma**.

(ii) La **fonction de RIEMANN complexe** se définit de la même selon :

$$(3) \quad \zeta(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n^{-z}, \quad \forall z \in \mathbf{C} \text{ tq } \text{Ré } z > 1.$$

(iii) On montre que :

$$(4) \quad \zeta(z) = \sum_{p \in \mathcal{P}} (1 - (p z)^{-1})^{-1},$$

où \mathcal{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.