FONCTION DE RENOUVELLEMENT (N12)
(20 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **fonction de renouvellement** est une notion de base en théorie du **renouvellement** (étude des **promenades aléatoires**, etc) et en **analyse séquentielle**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** donnée, dont la **fr** est notée F (supposée ici avoir un sens).

On considère un **processus** en **temps** discret $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ constitué d'une **suite iid** dont la **variable parente** est ξ, et l'on pose, $\forall N \in \mathbf{N}^*$:

$$(1) \qquad \begin{cases} T_N = \Sigma_{n=1}^{N} X_n , & \text{avec } T_0 = 0, \\ F^{*N} = F * \ldots * F & \text{(puissance n-ième de convolution de F).} \end{cases}$$

Autrement dit, $F^{*N}(x) = P([T_N \leq x]), \forall x \in \mathcal{X}$.

On appelle alors **fonction de renouvellement** de X la fonction R définie selon :

$$(2) \qquad R = \Sigma_{N \in \mathbf{N}^*} F^{*N}.$$

En particulier, si ξ est à valeurs positives ($\mathcal{X} = \mathbf{R}_+$), on peut interpréter cette **variable aléatoire** comme une **durée de vie** (d'une **unité statistique**) dont la fr est F. Par suite, R (x) s'interprète, $\forall x > 0$, comme l'**espérance mathématique** du nombre de renouvellements réalisés pendant la période]0, x]. En effet, si l'on définit, $\forall x \in \mathbf{R}$, la **variable de comptage** (va entière) $N_x : \Omega \mapsto \mathbf{N}^*$ comme le **nombre de renouvellements** (ie d'instants où $T_N \leq x$), ie si :

$$(3) \qquad N_x = \text{Card } E(x), \quad \text{avec} \quad E(x) = \{N \in \mathbf{N}^* : T_N \leq x\},$$

ou encore si :

$$(4) \qquad N_x = \Sigma_{N \in \mathbf{N}^*} u(x - T_N)$$

(où u est la **fonction de HEAVYSIDE**), alors la fonction de renouvellement $R : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{N}^*$ est définie par le nombre moyen d'instants où $T_N \leq x$, ie par :

$$(5) \qquad R(x) = E\, N_x , \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+ .$$

(ii) On peut estimer R de diverses façons. Si $(X_1, \ldots, X_N)$ désigne un **échantillon** donné (eg une portion de **trajectoire** de X), une **méthode non paramétrique** consiste à estimer (sans **biais**) chaque terme F^{*n} selon :

(6) $F_{(n),N}(x) = (C_N^{\ n})^{-1} \Sigma_{C(N,n)} \mathbf{1}(A_n(x))$,

avec $A_n(x) = [X_{a(1)} + ... + X_{a(n)} \leq x]$ (où a(n) désigne l'indice a_n). La sommation porte sur les $C(N, n) = C_N^{\ n}$ **combinaisons** des n indices $a_1, ..., a_n$ choisis parmi les N, avec $\{a_1, ..., a_n\} \subset N_N^*$.

Par suite, un **estimateur sans biais** de R est le suivant :

(7) $R_N^{\#} = a(N) . \Sigma_{n=1}^{N} F_{(n),N}$,

où a : $\mathbf{N^*} \mapsto \mathbf{N^*}$ est une fonction croissante tq :

(8)
$$a(N) \leq N,$$
$$\lim_N a(N) = +\infty.$$

L'exemple le plus simple vérifiant ces hypothèses est a (N) = N.

(iii) Ce qui précède s'étend à un **processus vectoriel**.

(iv) L'entier Card E (x) est parfois noté # {N ∈ **N*** : $T_N \leq x$}, ou encore # E (x).