FONCTION DE RISQUE (G)
(10 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **fonction de risque** est la perte moyenne encourue par le **statisticien** dans un **problème de décision** statistique (cf **problème statistique**) : c'est l'**espérance mathématique** de sa **fonction de perte**.

(i) On considère un problème basé sur un **modèle image** ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) paramétré par Θ, sur un **espace de décision** (D, $\mathscr{B}_D$) et sur un ensemble Δ de **règles de décision pures**.

On appelle **risque** (du statisticien) associé à une **décision** $\delta \in$ D lorsque l'**état** de la **Nature** est $\theta \in \Theta$ l'**espérance mathématique** de la fonction de perte L, ie la **« perte moyenne subie en jouant contre la nature »** :

(1) $$R(\delta, \theta) = E_\theta\, L(\delta(X), \theta) = \int_{\mathscr{X}} L(\delta(x), \theta)\, dP_\theta^X(x).$$

Ceci définit une fonction (certaine) :

(2) $$R : \Delta \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+ ,$$

appelée **fonction de risque**, associée à L.

Le **préordre** sur Δ induit par le risque R est la relation de préordre (partiel) $\prec$ suivante, définie entre règles de décision pures selon :

(3) $$\delta' \prec \delta'' \iff R(\delta', \theta) \le R(\delta'', \theta), \qquad \forall\, \theta \in \Theta.$$

(ii) Dans le cas d'une **règle de décision mixte** m $\in \Delta_M$, on appelle **risque** (associé à la décision aléatoire m) lorsque $\theta \in \Theta$ la quantité :

(4) $$R(m, \theta) = \int_{\mathscr{X} \times D} L(d, \theta)\, dm_x(d)\, dP_\theta^X(x).$$

Ceci définit une fonction (certaine) :

(5) $$R : \Delta_M \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+ ,$$

appelée **fonction de risque**, associée à L.

Le préordre sur Δ_M induit par le risque R est la relation de préordre (partiel) $\succ$ suivante, définie entre règles de décision mixtes selon :

(6) $$m' \succ m'' \iff R(m', \theta) \le R(m'', \theta), \qquad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Un préordre strict $<$ peut être défini en ajoutant à la condition précédente l'existence d'(au moins) un élément $\tau \in \Theta$ tq R (m', τ) $<$ R (m'', τ).

(iii) Les relations de préordre définies en (3) ou en (6) ne suffisent pas, en général, à déterminer une règle de décision optimale unique. Divers principes statistiques, ou **principes de réduction**, aident à réduire la classe des décisions optimales : **principe d'invariance** (ou principe d'**équivariance**), **principe d'exhaustivité**, principe de **symétrie**, **convergence stochastique**, etc.

Une règle de décision qui est, à la fois, (a) un **élément extrémal** pour l'un des préordres précédents et (b) une règle unique vérifiant certains de ces principes, est qualifiée de **règle (de décision) optimale**.

(iv) Lorsque des considérations de coût interviennent (cf **fonction de coût**), on étend la notion de risque précédente en lui ajoutant le **coût moyen** (espérance mathématique de la fonction de coût, puisque celle-ci est, en général, aléatoire) : ceci est le cas dans la planification d'une **expérience aléatoire** ou dans la mise au point d'un **sondage**.

(v) La notion de fonction de risque peut s'étendre ou se généraliser :

(a) en choisissant une autre caractéristique (paramètre de **centralité** ou **paramètre de position**) que l'espérance mathématique E_θ de L, eg : le **mode** S_θ (perte la plus probable), ou un **quantile** (eg la **médiane**) $Q_{p,\theta}$ (même probabilité entre pertes inférieures et pertes supérieures) ;

(b) au cas où la fonction de perte L est vectorielle (eg **perte quadratique**), ce qui permet de définir une fonction de risque vectorielle.

(vi) Lorsque le problème statistique se présente sous forme non (explicitement) paramétrée, avec une **représentation statistique** tq ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{P}^X$), les définitions se transposent directement. Ainsi, dans le cas « pur », les états de la Nature sont les éléments P^X de la famille de lois $\mathscr{P}^X$, et le risque s'écrit :

$$(1) \qquad R(\delta, P^X) = E_P\, L(\delta(X)) = \int_{\mathscr{X}} L(\delta(x))\, dP^X(x), \qquad \forall P^X \in \mathscr{P}^X.$$