FONCTION DE TRANSFERT (N7, N8)
(20 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **fonction de transfert** est une notion classique de l'**analyse cospectrale** (cf **cospectre**, **densité spectrale**, **filtrage**).

(i) Soit $(X_t)_{t \in T}$ un **processus** réel tq (T, +) est un **groupe** abélien additif, supposé être un **espace mesuré** (ie un **groupe mesurable** doté d'une **tribu de parties** $\mathcal{B}_T$ sur laquelle est définie une **mesure abstraite** positive ν).

Etant donné une **fonction de poids** (ou **noyau**) $\psi : T \mapsto \mathbf{R}_+$, on définit un **processus de moyenne mobile** $Y = (Y_t)_{t \in T}$ à l'aide du **filtrage** suivant :

(1) $X_t \mapsto Y_t = \int_T \psi(s)\, X_{t-s}\, d\nu(s), \quad \forall\, t \in T \text{ tq } t - s \in T.$

On appelle alors **fonction de transfert**, ou simplement **transfert**, de X vers Y la **transformée de FOURIER** de ψ, ie (cf **transformation de FOURIER**) :

(2) $\Psi(t) = \int_T e^{ist}\, \psi(s)\, d\nu(s), \quad \forall\, t \in T \text{ tq } s\,.\,t \in T.$

La définition (2) est parfois donnée avec e^{-ist} au lieu de e^{ist} (ie avec $\Psi(-t)$ au lieu de $\Psi(t)$).

(ii) Si ψ est une **densité de probabilité** pr à la mesure ν, alors Ψ n'est autre que sa **fonction caractéristique**. En pratique, on a souvent $(T, +, \mathcal{B}_T, \mu) = (\mathbf{Z}, +, \mathcal{P}(\mathbf{Z}), \nu)$ (où ν est la **mesure de comptage** de **Z**) ou bien $(T, +, \mathcal{B}_T, \nu) = (\mathbf{R}, +, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \lambda)$ (où λ est la **mesure de LEBESGUE** de **R**).

Dans certains cas, on peut choisir Y en sorte que Ψ possède des fréquences données.

(iii) La notion de transfert est surtout utilisée pour un **processus stationnaire en covariance**. Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un tel processus (avec $T = \mathbf{Z}$) et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ un processus déduit de X par un **filtrage linéaire**, ie :

(3) $Y_t = \Sigma_{j=1}^{p}\, b_j\, X_{t-j}, \quad \forall\, t \in T.$

Si X admet un **spectre** (ou **densité spectrale**) continu(e), noté(e) f_x , et une **représentation spectrale** de la forme :

(4) $X_t = \mu_x + \int_I e^{it\omega}\, dZ_x(\omega), \quad \forall\, t \in T,$

où $I = [-\pi, +\pi]$, alors Y admet une **représentation spectrale de CRAMER** :

(5) $Y_t = \mu_y + \int_I e^{it\omega}\, dZ_y(\omega), \quad \forall\, t \in T,$

et ces deux représentations (ie leurs processus associés Z_x et Z_y) sont tq :

(6) $dZ_y(\omega) = \{\Sigma_{j=1}^{p} \ b_j e^{-i\omega j}\} dZ_x(\omega), \qquad \forall \omega \in \mathbf{I}.$

Par suite, on appelle :

(a) **(fonction de) transfert** la fonction $t : \mathbf{I} \mapsto \mathbf{C}$ définie à partir de (6) selon :

(7) $t(\omega) = \Sigma_{j=1}^{p} \ b_j e^{-i\omega j}, \qquad \forall \omega \in \mathbf{I}$;

(b) **gain du filtre** (3) la fonction $g : \mathbf{I} \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par :

(8) $g(\omega) = |t(\omega)|^2, \qquad \forall \omega \in \mathbf{I},$

où $|z|$ dénote le module de $z \in \mathbf{C}$.

On montre que le **spectre**, ou **densité spectrale**, f_y de Y s'écrit :

(9) $f_y(\omega) = g(\omega) \, . \, f_x(\omega), \qquad \forall \omega \in \mathbf{I} \qquad$ (ie $f_y = g \, . \, f_x$).