

FONCTION DE TYPE POSITIF (A9, A10)

(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(G, +)$ un **groupe algébrique** additif abélien et $f : G \mapsto \mathbf{C}$. A toute suite finie $x = (x_1, \dots, x_n)$ sur G on peut associer une **forme hermitienne** sur $\mathbf{C}^n$ définie par :

$$(1) \quad h(u, v) = u' F v, \quad \forall (u, v) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n,$$

où $F \in M_n(\mathbf{C})$ est une **matrice** de terme général $f_{ij} = f(x_i - x_j)$.

On dit que f est une **fonction de type positif**, ou une **fonction semi-définie positive**, ou simplement une **fonction positive** (au sens large), ssi, $\forall x \in G^n$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, la forme h est une **forme positive** sur $\mathbf{C}^n$, ie :

$$(2) \quad q(u) = h(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbf{C}^n, \forall x \in G^n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(ii) Une fonction de type positif vérifie les propriétés suivantes :

$$(a) \quad f(0) \in \mathbf{R}_+ \text{ et } |f(x)| \leq f(0), \quad \forall x \in G;$$

$$(b) \quad f(-x) = \overline{f(x)}, \quad \forall x \in G.$$

(iii) A titre d'exemple, si $G = \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-i\omega x}$ est de type positif, $\forall \omega \in \mathbf{R}$. La **fonction de covariance** d'un **processus** complexe scalaire est une fonction de type positif.

(iv) le **théorème de BOCHNER** fournit la représentation d'une fonction de type positif comme **transformée de FOURIER** d'une fonction (ou d'une **mesure**) appelée **fonction de répartition spectrale** (ou mesure spectrale).