

FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE (A5, A10)

(12 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La représentation ou la définition d'une **fonction** peut s'effectuer de diverses façons. L'une d'elle utilise l'opération d'**intégration** (représentation **intégrale**).

(i) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un **espace mesuré** et $f : E \times \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{K}$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) une fonction tq :

(a) sa première **application** partielle $f(\cdot, r) : x \mapsto f(x, r)$ est $\mathcal{A}$ -mesurable, $\forall r \in \mathbf{R}^K$;

(b) sa deuxième application partielle $f(x, \cdot) : r \mapsto f(x, r)$ est continue en un point $r_0 \in \mathbf{R}^K$ (resp continue sur $\mathbf{R}^K$), μ -presque partout sur E ;

(c) il existe une fonction μ -intégrable $g : E \mapsto \mathbf{R}_+$ tq :

$$(1) \quad |f(\cdot, r)| \leq g \text{ sur } E, \quad \forall r \in \mathbf{R}^K.$$

(ii) On établit le **théorème de continuité** suivant. La fonction ψ définie sur $\mathbf{R}^K$ par :

$$(2) \quad r \in \mathbf{R}^K \mapsto \psi(r) = \int f(x, r) d\mu(x),$$

est continue au point r_0 (resp continue sur $\mathbf{R}^K$).

On dit alors que f est une **fonction définie par l'intégrale** précédente.

(iii) Les fonctions définies par des intégrales vérifient d'autres propriétés : eg le théorème de **dérivation sous le signe d'intégration** (ou dérivation sous le signe « somme » $\int$).