FONCTION DES MOMENTS EMPIRIQUES (C5, F3, H)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de loi P^ξ et $X = (X_1 ,..., X_N)$ un **échantillon iid** dont les coordonnées sont distribuées comme une **variable parente** ξ. X permet de définir le **produit d'espaces probabilisés** $(\mathbf{R}^N, \mathcal{B}(\mathbf{R}^N), (P^\xi)^{\otimes N}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P^\xi)^{\otimes N}$, et $P^X = (P^\xi)^{\otimes N}$ (cf **espace d'échantillonnage**, **modèle d'échantillonnage**).

On note :

(1) $\mu_j = E(\xi - E\,\xi)^j = \int (x - E\,\xi)^j\, dP^\xi(x), \qquad \forall\, j = 1 ,..., p,$

les **moments algébriques** théoriques (centrés) et :

(2) $m_j = N^{-1} . \Sigma_n (X_n - \bar{X}_N)^j, \qquad \forall\, j = 1 ,..., p,$

les **moments empiriques** (centrés) analogues, où p est un entier donné $(1 \leq j \leq p)$ tq les moments (théoriques) d'ordres j existent.

Une **fonction des moments empiriques** est une **fonction numérique** $\varphi : \mathbf{R}^q \mapsto \mathbf{R}$ dépendant de q moments empiriques définis en (2), parmi les p précédents $(q \leq p)$, ie :

(3) $(m_{\sigma(1)} ,..., m_{\sigma(q)}) \mapsto \varphi(m_{\sigma(1)} ,..., m_{\sigma(q)}) \in \mathbf{R},$

où σ désigne une permutation sur $N_q^* = \{1 ,..., q\}$. Sa « valeur » est aléatoire car ses q arguments dépendent de X.

(ii) Dans le cas de deux moments, soit $\mathcal{V}_{jk}$ un **voisinage** du point $(\mu_j , \mu_k) \in \mathbf{R}^2$ constitué des moments théoriques μ_j et μ_k (avec $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq k \leq p$ et $k \neq j$). On suppose que $\varphi : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ est :

(a) de classe C^2 (ie φ, $D\,\varphi$ et $D^2\,\varphi$ sont continûment différentiables) (cf **différentiabilité**) ;

(b) finie sur $\mathcal{V}_{jk}$.

Etant continue (donc mesurable), φ définit une **va** $\varphi(m_j , m_k)$ par l'intermédiaire des moments empiriques.

On montre, à l'aide de la **formule de TAYLOR stochastique** (développement de B. TAYLOR - W.H. YOUNG), que :

$$(3)\quad \begin{aligned} E\,\varphi(m_j, m_k) &= \varphi(\mu_j, \mu_k) + o(N^{-1}), \\ V\,\varphi(m_j, m_k) &= \{V(m_j)\,A_j^2 + 2\,.\,C(m_j, m_k)\,A_j\,B_k + V(m_k)\,B_k^2\} + o(N^{-3/2}), \end{aligned}$$

où $A_j = D_1\,\varphi(\mu_j, \mu_k)$ et $B_k = D_2\,f(\mu_j, \mu_k)$.

Autrement dit, l'**espérance** de la valeur de la fonction des moments empiriques diffère de sa valeur théorique d'un infiniment petit d'ordre 1, et sa variance diffère de l'expression entre accolades de (3) (deuxième ligne) d'un infiniment petit moindre, d'ordre 3 / 2.

Ces résultats se généralisent directement à $q > 2$ moments.

(iii) Lorsque l'échantillon $X = (X_1, \ldots, X_N) : \Omega \mapsto \Pi_{n=1}^N \mathscr{X}_n^N$ est quelconque, on peut le considérer comme un **vecteur aléatoire**. On note $\mathscr{B}_n$ la tribu définie sur $\mathscr{X}_n$, la loi de X est, par définition, $P^X = X(P)$ et ses lois coordonnées sont les **lois marginales** $P^{X(n)} = X_n(P)$ (où X(n) désigne X_n), $\forall\, n \in N_n^*$. Par suite, $(\Pi_{n=1}^N \mathscr{X}_n, \otimes_{n=1}^N \mathscr{B}_n, P^X)$ désigne le **produit d'espaces probabilisés** correspondant.

On note alors, $\forall\, n \in N_n^*$:

$$(4)\qquad \mu_{j,n} = E(X_n - E\,X_n)^j = \int (x - E\,X_n)^j\, dP^{X(n)}(x), \qquad \forall\, j = 1, \ldots, p,$$

les **moments algébriques** théoriques (centrés) resp associés à $P^{X(n)}$, et :

$$(5)\qquad m_{j,n} = N^{-1}\,.\,\Sigma_n (X_n - \bar{X}_N)^j, \qquad \forall\, j = 1, \ldots, p,$$

les moments empiriques, avec ici $X_n \sim P^{X(n)}$, $\forall\, n \in N_n^*$.

La **fonction des moments empiriques** $\varphi : \mathbf{R}^q \mapsto \mathbf{R}$ dépend alors de q x N moments empiriques définis en (5), parmi les p x N précédents ($q \leq p$).

(iv) Les fonctions de moments empiriques sont souvent utilisées, notamment en **théorie des sondages** (eg **estimateur par le quotient**) ou dans l'étude des moments d'un **estimateur**.

(v) Lorsque φ est une **fonction convexe**, l'égalité (2) est à rapprocher de l'**inégalité de JENSEN**.