FONCTION DOMINÉE (A10, E)
(18 / 06 / 2019)

(i) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace topologique** et (F, ||.||) un **espace normé**. On considère une partie $P \subset E$ et un point $a \in$ Adh P (adhérence de P).

On dit que $f : P \mapsto F$ est une **application dominée** par une application $g : P \mapsto F$ au **voisinage** du point a ssi il existe un nombre réel (fini) M > 0 et un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tq :

(1) $\|f (x)\| \leq M . \|g (x)\|, \qquad \forall x \in P \cap \mathcal{V}_a$.

Deux **notations** classiques expriment la définition (1): (a) la **notation de G.H. HARDY** : $f \prec g$ et la **notation de E.G. LANDAU** : f = O (g) (« **grand zéro** » de g).

Dans la définition, on peut remplacer P par un ouvert $U \in \mathcal{O}$ contenant le point a.

(ii) On montre que :

(a) la relation f = O (g) est un **préordre** sur l'espace F^P des applications du type précédent ;

(b) si g est donnée, l'ensemble $\{f \in F^P : f = O (g)\}$ est un sous-**espace vectoriel** de F^P ;

(c) si F = **R**, on a (produit ordinaire des fonctions numériques) :

(2) $f_1 = O (g_1)$ et $f_2 = O (g_2) \Rightarrow f_1 . f_2 = O (g_1 . g_2)$.

Cette propriété s'étend à un nombre quelconque (mais fini) de fonctions numériques ;

(d) si $0 \notin g (P)$, il existe un voisinage $\mathcal{W}_a$ de a tq :

(3) $f = O (g) \Rightarrow \|f (x)\| / g (x) \leq M, \qquad \forall x \in \mathcal{W}_a$.

Si f = O (g) et g = O (f), on dit que f et g sont des **fonctions semblables** (au voisinage de a).

(ii) Les notions mathématiques précédentes comportent des analogues probabilistes (ou stochastiques) (cf **ordres de convergence en probabilité**).

Ainsi, on considère un **espace probabilisé** (Ω, $\mathcal{T}$, P), dans lequel Ω est un **espace topologique** muni de sa **tribu de parties** borélienne $\mathcal{T}$, et deux **suites** $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de **va** définies sur Ω et à valeurs dans un **espace vectoriel** normé (F, ||.||) (eg deux **processus vectoriels** en **temps** discret).

On dit alors que X est une **suite dominée en probabilité** par Y ssi :

(4) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ M_\varepsilon > 0$ tq $P(||X_n|| \leq M_\varepsilon . ||Y_n||) \geq 1 - \varepsilon, \ \forall\ n \in \mathbf{N}$.

La **notation de LANDAU** correspondante est alors $X = O_p(Y)$ ou $X = O_P(Y)$ (« **grand zéro » en probabilité**, ou **P-domination**).

La définition de O_p est souvent utilisée dans l'étude des limites stochastiques des **suites** de va (ou de processus), ainsi que dans l'étude des **propriétés asymptotiques** de certains **modèles statistiques** (eg **modèle non linéaire**).