FONCTION GÉNÉRATRICE DES MOMENTS FACTORIELS (C5)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) On appelle **fonction génératrice des moments factoriels** la fonction g_ξ^* définie à partir de la **fonction génératrice** g_ξ (ou à partir de G_ξ) selon :

(1) $g_\xi^* (v) = G_\xi (1 + v) = E (1 + v)^\xi = g_\xi \{Log(1 + v)\}$,

pour tout v tq $|v| < 1$ et $E (1 + v)^\xi < \infty$.

(ii) Cette dénomination vient de la propriété suivante. Si $\xi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p (\Omega, \mathscr{T}, P)$, alors :

(2) $D^j g_\xi^* (0) = (D^j g_\xi^* (v))_{v=0} = E \{\xi (\xi - 1) \ldots (\xi - j + 1)\}$,

n'est autre que le **moment factoriel** d'ordre j = 1 ,..., p de ξ, ie :

(3) $E (\xi)_i = E \{\xi (\xi - 1) \ldots (\xi - j + 1)\} = \mu_{[i]}$.

Par suite, si la loi considérée est une **loi discrète** qui admet des **moments** de tous ordres, on a :

(4) $g_\xi^* (v) = \Sigma_{j=1}^{\infty} (j\,!)^{-1} . \mu_{[j]} . v^j$.

(iii) La fonction Log g_ξ^* est appelée **fonction génératrice des cumulants factoriels**. En effet, le **cumulant factoriel** d'ordre j est défini comme le coefficient $k_{(j)}$ dans le développement de cette fonction en série entière :

(5) $Log\ g_\xi^* (v) = \Sigma_{j=1}^{\infty} k_{(j)} . (v^j / j\,!)$.