

FONCTION NÉGLIGEABLE (A10, E)

(26 / 07 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Comme la notion de **fonction dominée**, celle de **fonction négligeable** permet de comparer deux fonctions au voisinage d'un point. Elle admet une forme probabiliste.

(i) Soit $(E, \mathcal{O})$ un **espace topologique**, $(F, \|\cdot\|)$ un **espace normé**, $P \subset E$ une partie de E et $a \in \bar{P} = \text{Adh } P$ (adhérence de P).

On dit que $f : E \mapsto F$ est une **fonction négligeable** pr à une fonction $g : E \mapsto F$ au voisinage de a ssi, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un **voisinage** $\mathcal{V}_a$ de a tq :

$$(1) \quad \|f(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|g(x)\|, \quad \forall x \in P \cap \mathcal{V}_a.$$

Deux notations classiques expriment cette propriété :

(a) la **notation de G.H. HARDY** : $f \prec g$;

(b) la **notation de E.G. LANDAU** : $f = o(g)$ (« **petit zéro** » de g).

La définition est parfois donnée en remplaçant dans (1) $a \in \text{Adh } P$ par $a \in U$, où U est un **ouvert** de E (ie $U \in \mathcal{O}$).

(ii) Les propriétés de base sont les suivantes :

(a) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ (si f est négligeable devant g , alors f est une **fonction dominée** par g) ;

(b) si $F = \mathbf{R}$, il existe un voisinage $\mathcal{W}_a$ de a tq :

$$(2) \quad f = o(g) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a, x \in P} \|f(x)\| / \|g(x)\| = 0.$$

(iii) La notion possède une version probabiliste (cf **ordres de convergence en probabilité**). Ainsi, soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé**, $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux **suites** de **va** définies sur Ω et à valeurs dans un **espace normé** $(F, \|\cdot\|)$. On suppose que Ω est un **espace topologique** et que $\mathcal{F}$ est sa **tribu borélienne**.

On dit alors que X est une **suite négligeable en probabilité**, ou **P-négligeable**, devant Y ssi :

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N_{\varepsilon, \eta} \text{ tq :}$$
$$n \geq N_{\varepsilon, \eta} \Rightarrow P(\|X_n\| \leq \varepsilon \|Y_n\|) \geq 1 - \eta.$$

Comme précédemment, on utilise :

(a) une **notation de type HARDY** : eg $X \prec_p Y$ ou $X \prec_P Y$;

(b) ou, plus souvent, la **notation de LANDAU**, ie : $X = o_p(Y)$, ou $X = o_P(Y)$, ou $X_n = o_p(Y_n)$;

(c) ou encore $X_n = o_P(Y_n)$ (« **petit zéro** » en probabilité de LANDAU).

En particulier, si $Y_n = \psi(n)$ définit une suite de **vars** positives dégénérées ($\psi(n) > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$) (cf **variable dégénérée**), on dit que $X_n = o_p(\psi(n))$ ssi $\text{plim}_n \{X_n / \psi(n)\} = 0$. On entend ici par **suite dégénérée** une suite $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui est P-presque certainement à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ (suite de **variables presque certaines**).