FONCTION PIVOTALE (G, H)
(27 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **fonction pivotale** est une **fonction aléatoire**, car elle dépend de l'**échantillon** X utilisé, mais sa loi ne dépend pas du **paramètre** θ du **modèle** considéré.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un **modèle statistique** paramétré par Θ, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** donnée (ou un **échantillon**). On considère deux **espaces mesurables** auxiliaires $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_\mathcal{S})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ et une fonction $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$. On note $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ le **modèle image** résultant et $s : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ une **application mesurable** donnée, à laquelle est associée la **statistique** $S = s(X) : \Omega \mapsto \mathcal{S}$.

On appelle (R.A. FISHER) **fonction pivotale** pour $g(\theta)$ toute application $h : \mathcal{S} \times g(\Theta) \mapsto \mathcal{Y}$ tq :

(a) $s \mapsto h(s, g(\theta))$ est $\mathcal{B}_\mathcal{S}$-mesurable, $\forall\ \theta \in \Theta$;

(b) la **loi** de la va $Z = h(S, g(\theta))$, appelée **quantité pivotale**, ne dépend pas de $\theta \in \Theta$.

Autrement dit, il existe une **lp** « fixe » (ie indépendante de θ) Q sur $\mathcal{C}$ tq :

(1) $\quad \mathcal{L}\{h(s(X), g(\theta))\} = Q, \quad \forall\ \theta \in \Theta,$

ou encore :

(2) $\quad P_\theta^X(\{x \in \mathcal{X} : h(s(x), g(\theta)) \in C\}) = Q(C), \quad \forall\ C \in \mathcal{C}, \forall\ \theta \in \Theta.$

En pratique, il existe le plus souvent un exposant $Q \in \mathbf{N}^*$ telle que $g(\Theta) \subset \mathbf{R}^Q$.

(ii) On suppose que le modèle précédent est un **modèle d'échantillonnage** (à distance finie) de la forme $(\mathcal{X}_0, \mathcal{B}_0, (P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta})^{\otimes N}$, considéré comme plongé dans le modèle asymptotique $(\mathcal{X}_0, \mathcal{B}_0, (P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta})^{\otimes \mathbf{N}^*}$ (cf **plongement**), et on considère une fonction $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$.

On appelle alors **suite de fonctions asymptotiquement pivotale(s)** pour $g(\theta)$ toute suite $(h_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ de fonctions $h_N : \mathcal{X}_0^N \times g(\Theta) \mapsto \mathcal{Y}$ vérifiant :

(a) $x \mapsto h_N(x, g(\theta))$ est $\mathcal{B}$-mesurable, $\forall\ \theta \in \Theta$ et $\forall\ N \in \mathbf{N}^*$;

(b) il existe une loi Q indépendante de θ et tq :

(3) $h_N (X (N), g (\theta)) \rightarrow^{\mathscr{L}}{}_{N \to +\infty}$ Q (**convergence en loi**),

où X (N) = $(X_1, ..., X_N)$ est la **va** (**échantillon**) de loi $P_\theta^X = (P_\theta^\xi)^{\otimes N}$ et où l'on a posé, pour simplifier, $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}}) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

(iii) La notion de fonction pivotale est liée à celle de **région de confiance** (donc aussi à celle de **test**). En effet, si $\alpha \in]0, 1[$ et si $C \in \mathscr{C}$ est tq Q (C) = 1 - α, on a :

(4) $P_\theta^X (\{x \in \mathcal{X} : h (x, g (\theta)) \in C\}) = 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$

en notant toujours, pour simplifier, $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}}) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Par suite, une **région de confiance** S (x) de niveau 1 - α (avec $\alpha << 1$) pour le paramètre g (θ) est définie par :

(5) $S (x) = \{\tau \in g (\Theta) : h (x, \tau) \in C\} \subset g (\Theta).$

Elle vérifie donc bien :

(6) $P_\theta^X (\{x \in \mathcal{X} : g (\theta) \in S (x)\}) = 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$

(iv) Le concept de fonction pivotale se relie au problème de l'**inférence fiducielle (de R.A. FISHER)** (cf **théorie fiducielle**). La **méthode fiducielle** consiste, au vu d'une observation $x = X (\omega) \in \mathcal{X}$, à inverser la relation :

(7) $z = h (s (x), g (\theta)) = h (s (x), \tau)$

pr à τ, ie :

(8) $\tau = H (s (x), z).$

On appelle alors **loi fiducielle** du paramètre $\tau \in g (\Theta)$ la **loi de probabilité** de la va T = H (s (X), Z) : cette loi ne dépend donc pas de τ.

A titre d'exemple, si h (S, τ) = h (S, g (θ)) = F_τ^S (**fr** de la va S), la va Z = F_τ^S suit une **loi uniforme** $P^Z = \mathcal{U}(0, 1)$ indépendante de τ (cf **lemme d'uniformisation des lois**). Si S est l'**estimateur du maximum de vraisemblance** de $\tau = g (\theta)$, sa densité est $f_\tau^S = \partial F_\tau^S / \partial S$ et l'on appelle **densité fiducielle** la densité définie par :

(9) $\varphi_\tau^S = \partial F_\tau^S / \partial \tau.$