FONCTION « SPLINE » (A10, H, J)
(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **fonction « spline »** est utilisée dans des contextes tq : problème d'**interpolation** (eg définition d'un **estimateur** pour une densité), problème de calcul numérique. C'est souvent une fonction polynômiale « par morceaux », vérifiant des contraintes de **continuité** entres ces morceaux. On en présente ici des aspects élémentaires (ne faisant pas appel à la notion d'espace de SOBOLEV).

(i) Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ un segment de $\mathbf{R}$, $f : I \mapsto \mathbf{R}$ une **fonction numérique** et $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$ une subdivision de I, dont les points séparateurs x_i sont appelés les **noeuds**.

De façon générale, on appelle **(fonction) « spline »** toute fonction numérique « simple » qui interpole f sur I.

Est ici qualifiée de « simple » (cf aussi **fonction simple**) toute fonction dont la **restriction** aux segments $I_j = [x_j , x_{j+1}]$ ($\forall$ j = 1 ,..., k) :

(a) est de forme « élémentaire » : polynômiale, exponentielle, etc ;

(b) satisfait à des **conditions de régularité** entre segments.

Selon le type de fonction simple utilisé, on qualifie la fonction spline de façon conforme : (fonction) spline polynômiale, (fonction) spline exponentielle, etc.

(ii) Ainsi, on appelle (fonction) **spline polynômiale** associée à f toute fonction, notée S_f ou S (f), dont la **restriction** à I_j est une fonction polynômiale P_n (de degré au plus égal à n) tq :

$$(1) \quad \begin{aligned} P_n (x_j) &= f (x_j), \\ P_n (x_{j+1}) &= f (x_{j+1}). \end{aligned}$$

A titre d'exemples, on parle ;

(a) si n = 1, de **spline linéaire** (en fait, de **spline affine par morceaux**) ;

(b) si n = 2, de **spline quadratique** ou de **spline parabolique** ;

(c) si n = 3, de **spline cubique**.

(iii) On doit généralement imposer des **conditions de régularité** aux fonctions splines. Ainsi, si S (f) est une spline cubique, on dit :

(a) que S (f) est de classe C^1 sur I ssi, à la fois :

(2)
$$D\,S_f\,(a) = \alpha$$
$$D\,S_f\,(b) = \beta,$$

où α (resp β) est la valeur de la **dérivée** au point a du polynôme de degré m qui interpole f aux points x_0 , x_1 ,..., x_m (resp aux points x_{k-m} ,..., x_k) ;

(b) que S (f) est de classe C^2 sur I ssi :

(3) $$D^2\,S_f\,(a) = D^2\,S_f\,(b) = 0.$$

(iv) Les définitions s'étendent au cas où I est un intervalle non borné de **R**, et en particulier à I = **R**. On considère alors des subdivisions, analogues aux précédentes, notées $(I_j)_{j=0,1,\ldots,k}$, avec :

(4) $$I_0 =]-\infty\,,\,x_0] \quad\text{et}\quad I_k = [x_k\,,\,+\infty[.$$

(v) Il est souvent possible d'expliciter la fonction spline qui interpole une fonction donnée f : **R** $\mapsto$ **R**. Ainsi, on peut écrire une spline continue et affine par morceaux (spline dite « linéaire ») S_f sous la forme :

(5) $$S_f\,(x) = \Sigma_{j=0}^{k+1}\,\mathbf{1}(I_j\,(x))\,.\,(\alpha_j\,x + \beta_j) = \Sigma_{j=0}^{k+1}\,\mathbf{1}(I_j\,(x))\,.\,a_j\,(x),$$

où **1**(A) désigne la **fonction indicatrice** d'une **partie** A, avec :

(6)
$$a_j\,(x_{j-1}) = \alpha_j\,x_{j-1} + b_j = \alpha_{j-1} + x_{j-1} + \beta_{j-1} = a_{j-1}(x_{j-1}),$$
$$a_j\,(x_j) = \alpha_j\,x_j + \beta_j = \alpha_{j+1}\,x_j + \beta_{j+1} = a_{j+1}\,(x_j).$$

Dans le cas où S_f est une fonction spline polynômiale d'ordre m $\geq$ 1, on remplace les fonctions affines a_j précédentes par des polynômes P_j de degré au plus égal à m :

(7) $$S_f\,(x) = \Sigma_{j=0}^{k+1}\,\mathbf{1}(I_j\,(x))\,.\,P_j\,(x),$$

avec :

(8)
$$P_j\,(x_{j-1}) = P_{j-1}\,(x_{j-1}), \qquad \forall\, j \in N_{k+1}^*,$$
$$P_j\,(x_j) = P_{j+1}\,(x_j), \qquad \forall\, j \in N_k\,,$$

S_f étant supposée de classe C^m sur **R**.

(vi) L'interpolation à l'aide des fonctions splines peut aussi s'effectuer pour des fonctions numériques à plusieurs variables f : $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$. Les fonctions « simples » interpolantes sont souvent des fonctions polynômiales multidimensionnelles.

Ainsi, une fonction **spline bilinéaire** (ou spline à deux dimensions) se définit selon :

(9) $S_f (x, y) = \delta + \Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i \,.\, u_i (x) + \Sigma_{j=1}^{l} \beta_j \,.\, v_j (y) + \Sigma_{i=1}^{k} \Sigma_{j=1}^{l} \gamma_{ij} \,.\, u_i (x) \,.\, v_j (y),$

formule dans laquelle les fonctions splines élémentaires, associées aux subdivisions $(x_i)_{i=1,\ldots,k}$ et $(y_j)_{j=1,\ldots,l}$ de **R**, sont définies selon :

$$
(10) \quad
\begin{aligned}
u_1 (x) &= x, \\
u_i (x) &= (x - x_{i-1})^+, \quad \forall\, i \in N_k^* \setminus \{1\}, \\
v_1 (y) &= y, \\
v_j (y) &= (y - y_{j-1})^+, \quad \forall\, j \in N_l^* \setminus \{1\},
\end{aligned}
$$

où r^+ désigne la **partie positive** du nombre réel $r \in$ **R**.

(vii) Sous des conditions générales, on montre l'existence et l'unicité de la fonction spline associée à toute fonction numérique f suffisamment régulière. On peut ainsi définir et étudier les propriétés de nombreux espaces de telles fonctions.