FONCTIONNELLE (A3, A4, A8, A9, G8)
(08 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit E un **espace vectoriel topologique** sur le corps **K** (avec **K** = **R** ou **K** = **C**) (eg un **espace normé**), et E' = $\mathscr{L}$(E, **K**) son **dual topologique** (ie l'espace des **formes linéaires** continues sur E).

On appelle **fonctionnelle (linéaire)** tout élément f de E'. On note alors :

(1) $(x, f) \in E \times E' \mapsto f(x) \in \mathbf{K}$.

(ii) En **Statistique** (notamment en théorie de la **robustesse**), une **fonctionnelle** est une application **caractéristique légale** particulière.

Ainsi, dans un **problème d'estimation** fondé sur un modèle $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathscr{P}^X)$, image d'un **modèle statistique** initial par une **va** (**échantillon**) $X : \Omega \mapsto \mathscr{X}$, ainsi que sur un **espace mesurable** $(\Gamma, \mathscr{B}_\Gamma)$ de caractéristiques associées à la **famille** $\mathscr{P}^X$, une fonctionnelle est une **application** g associant une **caractéristique** $\gamma \in \Gamma$ à toute **lp**, ie une application de la forme :

(2) $g : \mathscr{P}^X \mapsto \Gamma$.

(iii) Si μ est une **mesure positive** dominant une **famille** de lois P^ξ et si $f = dP^\xi / d\mu$ désigne la **densité** de $P^\xi \in \mathscr{P}^\xi$ pr à μ, on peut définir une fonctionnelle tq $\mathscr{T}(f) = \int J(f)\, dP^\xi = \int J(f)\, f\, d\mu$, où $J : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est une fonction connue (ou donnée) tq $\mathscr{T}(f) < \infty$.

A titre d'exemple, le choix de J (f) = - Log f conduit à la notion d'**entropie**. On peut estimer $\mathscr{T}(f)$ eg en remplaçant dP^ξ par dF_N (**fonction de répartition empirique** associée à un N-**échantillon iid** de ξ) et f par un **estimateur** (non paramétrique) $f_N\tilde{}$ (eg l'**estimateur par le noyau**).

(iv) Souvent, on remplace $\mathscr{P}^X$ par la famille $\mathscr{F}$ des **fr** associées aux éléments de $\mathscr{P}^X$, et l'on appelle **fonctionnelle** toute application de la forme :

(3) $h : \mathscr{F} \mapsto \Gamma$,

notamment lorsque $\Gamma = \mathbf{R}$.

(v) La définition (2) (resp (3)) s'applique, notamment, au cas où g (resp h) est calculée au « point » P_N (**loi empirique**) (resp F_N (**fonction de répartition empirique**)). On obtient ainsi un **estimateur « naturel » de la fonctionnelle** considérée (cf **statistique naturelle**) (cf aussi **paramètre**).

Généralement, on suppose que $\mathscr{F}$ est constituée de fr associées à des **lois absolument continues** pr à une **mesure positive** σ-finie μ donnée (cf **mesure σ-finie**), définie sur $\mathscr{B}$ (le plus souvent, $\mathscr{X}$ = $\mathbf{R}^N$ et $\mu = \lambda_N$).

(vi) On appelle **fonctionnelle régulière** sur $\mathscr{F}$ une fonctionnelle h définie en (3) tq, $\forall$ F $\in \mathscr{F}$, il existe un **estimateur sans biais** T = t (X) de h (F), ie :

(4) $\quad E\, T = h(F), \qquad \forall F \in \mathscr{F}$,

avec $E\, T = E\, t(X) = \int t(x)\, dP^{\xi}(x)$.

Lorsque $\mathscr{X} = \mathbf{R}^N$ et que $X = (X_1, \dots, X_N)$ est une **suite indépendante**, en notant $T_N = t_N(X) = t_N(X_1, \dots, X_N)$, on dit que $(T_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une **suite d'estimateurs sans biais** de h (F) ssi, $\forall F \in \mathscr{F}$, elle vérifie :

(5) $\quad E\, T_N = E\, t_N(X_1, \dots, X_N) = \int t_N(x_1, \dots, x_N)\, dP^X(x_1, \dots, x_N) = h(F), \ \forall N \in \mathbf{N}^*$.

On appelle alors **degré de la fonctionnelle régulière** h le plus petit des indices N tq (5) soit vérifié. Si N_0 est cet indice, on appelle parfois **noyau de la fonctionnelle régulière** h la fonction :

(6) $\quad \psi : (x_1, \dots, x_{N(0)}) \mapsto t_{N(0)}(X_1, \dots, X_{N(0)})$.

où N(0) désigne par commodité N_0 .