FONCTIONS DE BESSEL (A10)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Les **fonctions de BESSEL** sont des fonctions définies comme solutions de l'**équation différentielle de F.F.W. BESSEL**, ie de l'équation du second ordre suivante :

(1) $x^2 . y'' + x . y' + (x^2 - p^2) . y = 0,$

avec $p \in \mathbf{N}$, où le symbole ' désigne la dérivation (cf **dérivation**, **dérivée**).

(ii) La **fonction de BESSEL** d'ordre p est représentable en série entière de la forme :

(2) $J_p (x) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \ (n ! . (n + p) !\}^{-1} (x / 2)^{2 n + p}.$

(iii) On montre que, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$d J_0 (x) / dx = - J_1 (x),$

(3) $d (x^p J_p (x)) / dx = x^p J_{p-1} (x),$

$J_{p+1} (x) = (2 p / x) J_p (x) - J_{p-1} (x).$

(iv) On étend la définition des fonctions J_p au cas où $p \in \mathbf{Z}$. On montre alors que, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$J_{- p} (x) = (-1)^p J_p (x), \forall p \in \mathbf{Z},$

(4)

$\exp \{(t - t^{-1}) (x / 2)\} = \Sigma_{p \in \mathbf{Z}} J_p (x) t^p, \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*,$

où $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(v) On étend encore la définition des fonctions J_p au cas où $p \in \mathbf{R}$ en remplaçant, dans (2), (n + p) ! par Γ (n + p + 1) (cf **fonction Γ**). On montre ainsi que :

(5) $J_{1/2} (x) = (2 / \pi)^1 (\cos x) x^{-1/2}.$

Les deuxième et troisième propriétés de (3) sont encore valables.

Enfin, on peut étendre les définitions au cas où $p \in \mathbf{C}$.