

FORME FINALE (J1, N)

(04 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **modèle dynamique** (linéaire) comportant :

(a) une liste η constituée de G **variables endogènes** $\eta_1, \dots, \eta_G$, une liste ξ constituée de K **variables exogènes** $\xi_1, \dots, \xi_K$ et une liste ε constituée de G **perturbations aléatoires** $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_G$, la liste ξ étant supposée indépendante de (ou au moins non corrélée avec) la liste ε ;

(b) deux **matrices** $B(L) \in M_G(\mathbf{R})$ et $C(L) \in M_{GK}(\mathbf{R})$ définies par les polynômes formels :

$$(1) \quad \begin{aligned} B(L) &= B_0 + B_1 L + \dots + B_p L^p, \\ C(L) &= C_0 + C_1 L + \dots + C_q L^q, \end{aligned}$$

dans lesquels les matrices B_i ($i = 0, 1, \dots, p$) sont de même format que B , les matrices C_j ($j = 0, 1, \dots, q$) de même format que C et L désigne l'**opérateur retard** (sur l'espace des **trajectoires**, ie $Lx = x_{-1}$) ;

(c) une **matrice d'observation** (X, Y) du couple (ξ, η) , considérée comme une **trajectoire** de (ξ, η) (cf **espace d'observation**). Ce **couple aléatoire** définit ainsi un **processus stochastique**.

(ii) La **forme structurelle** du modèle dynamique linéaire s'écrit, dans l'espace des var (ξ, η, ε) :

$$(2) \quad B(L)\eta + C(L)\xi = \varepsilon,$$

ie, pour l'**observation** relative à l'instant t :

$$(3) \quad B(L)y_t + C(L)x_t = u_t, \quad \forall t \in \mathbf{N}_T^*.$$

On suppose généralement que la **convention de normalisation** $(B_0)_{gg} = 1$ est vérifiée $\forall g \in \mathbf{N}_G^*$ et que le modèle est un **modèle stable**, ie que les racines de l'équation :

$$(4) \quad \text{Dét}(\sum_{i=0}^p B_i z^i) = 0$$

sont de module strictement supérieur à 1.

(iii) On appelle **forme réduite** du modèle l'équation obtenue en pré-multipliant (2) par B_0^{-1} , de façon à séparer les variables endogènes (non décalées), ie :

$$(5) \quad \eta = -B_0^{-1} \{\sum_{i=1}^p B_i(L)\eta + C(L)\xi\} + B_0^{-1}\varepsilon,$$

ce qui s'écrit, à tout instant t :

$$(6) \quad y_t = -B_0^{-1} \{\sum_{i=1}^p B_i y_{t-i} + C(L) x_t\} + B_0^{-1} u_t .$$

(iv) On appelle alors **forme finale** du modèle l'équation suivante :

$$(7) \quad \eta = -B(L)^{-1} C(L) \xi + B(L)^{-1} \varepsilon ,$$

obtenue en pré-multipliant (2) par l'opérateur $B(L)^{-1}$, ie par $\{B(L)\}^{-1}$, ce qui se traduit, à l'instant t , par l'équation :

$$(8) \quad y_t = -B(L)^{-1} C(L) x_t + B(L)^{-1} u_t .$$

Autrement dit, y_t s'exprime à l'aide de l'ensemble des valeurs décalées de x_t et de u_t .

(v) Enfin, si l'on multiplie l'équation (7) ou (8) par $\text{Dét}(B(L))$, on définit l'**équation finale**, aussi appelées **équations finales**, du modèle dynamique :

$$(9) \quad \text{Dét}(B(L) \eta) = -\{\text{Dét} B(L)\} B(L)^{-1} C(L) \xi + \{\text{Dét} B(L)\} B(L)^{-1} \varepsilon ,$$

ainsi que les analogues correspondant aux observations (x_t, y_t) .