

FORME HERMITIENNE (A3, A4)

(05 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit E un **espace vectoriel** sur un corps K (avec $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$).

(i) On appelle **forme hermitienne**, ou **forme hermitique**, ou encore **produit scalaire**, sur E une application $h : E^2 \mapsto K$ tq :

$$(a) \quad h(x, y) = \bar{h}(y, x), \quad \forall (x, y) \in E^2 \text{ (symétrie hermitienne)} ;$$

$$(b) \quad h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y), \quad \forall (\alpha, \beta) \in K^2 \text{ et } \forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \text{ (semi-linéarité à gauche)}.$$

On note aussi $\langle x, y \rangle$, ou $(x | y)$, ou $x \cdot y$ la valeur $h(x, y)$ de la forme hermitienne h au point (x, y) . La forme elle-même est alors notée en remplaçant, dans les deux premiers symboles précédents, x et y par des points : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $(\cdot | \cdot)$.

(ii) On dit que $x \in E$ et $y \in E$ sont deux **vecteurs orthogonaux**, ou parfois deux **vecteurs conjugués**, pr à h (ou que ce sont des vecteurs h -orthogonaux, ou h -conjugués) ssi (cf **orthogonalité**) :

$$(1) \quad h(x, y) = 0.$$

On note alors $x \perp y$ la **relation d'orthogonalité** ainsi définie sur E .

(iii) Une **forme hermitienne** h sur E est dite :

(a) **non dégénérée** ssi il n'existe pas dans E de vecteur $x \neq 0$ qui soit orthogonal à E (ie à tout vecteur de E), ie :

$$(2) \quad \{h \text{ est non dégénérée}\} \Leftrightarrow \{x \perp E \Rightarrow x = 0\} ;$$

(b) **dégénérée** ssi il existe un vecteur $x \neq 0$ orthogonal à E ;

(c) **positive** (au sens large) ssi :

$$(3) \quad h(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in E.$$

(iv) Si h est une forme hermitienne positive, la fonction $x \mapsto N(x) = (h(x, x))^{1/2}$ est une **semi-norme** sur E . Si, de plus, h n'est pas dégénérée, la semi-norme N est une **norme** sur E , donc (E, N) est un **espace normé**. La **distance** d associée à la norme N est définie par :

$$(4) \quad d(x, y) = N(x - y), \quad \forall (x, y) \in E^2.$$

(v) Le cas particulier où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ est important en pratique. La forme h est alors appelée **forme bilinéaire** (symétrique), ou **produit scalaire**, sur E . Cette forme est dite :

(a) **définie** sur E ssi :

(5) $h(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

(b) **(strictement) positive** (resp **(strictement) négative**) ssi :

(6) $h(x, x) > 0, \forall x \neq 0$ (resp $h(x, x) < 0, \forall x \neq 0$).

(c) **semi-positive** (resp **semi-négative**) ssi :

(7) $h(x, x) \geq 0, \forall x \in E$, et il existe un vecteur $x \neq 0$ tq $h(x, x) = 0$.

(vi) Lorsque E est de dimension finie $\dim E = n$ et rapporté à une **base** donnée, la **matrice** d'une forme hermitienne h sur E est :

(a) une **matrice hermitienne** si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;

(b) une **matrice symétrique** réelle si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

On donne à ces matrices les mêmes qualificatifs que les formes qu'elles représentent : matrices définies, matrices positives, etc.