FORME MULTILINÉAIRE (A3, C1, G1, K1)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E_i (i = 1,..., k) des **espaces vectoriels** sur le même corps commutatif **K**.

On appelle **forme multilinéaire** une **application multilinéaire** f définie sur $\Pi_{i=1}^k E_i$ et à valeurs dans **K**, ie f : $\Pi_{i=1}^k E_i \mapsto \mathbf{K}$.

En particulier, lorsque K = 2, une forme multilinéaire définie sur $\Pi_{i=1}^2 E_i = E_1 \times E_2$ est appelée **forme bilinéaire**.

(ii) Un exemple classique de forme multilinéaire (alternée) est celui du **déterminant** associé à une **matrice**.

(iii) En **Statistique**, le concept de forme bilinéaire intervient notamment pour mesurer la **variabilité** au sein d'un **ensemble** donné (cf **forme quadratique**).

Une forme multilinéaire peut aussi s'associer à un **tableau statistique** (multidimensionnel) ou aux moments d'un vecteur aléatoire (cf **moment algébrique**).

Ainsi, un (m,n)-tableau statistique $T = (t_{ij})_{(i,j) \in \{1,..., m\} \times \{1,..., n\}}$ peut s'assimiler à un couple $((t_{ij})_{(i,j)}, \{1,..., m\} \times \{1,..., n\})$ composé :

(a) des **données** t_{ij} (ici nécessairement numériques) ;

(b) de deux « descripteurs » i et j, chacun doté d'un nombre fini de « modalités ».

Etant donnés deux vecteurs $h \in \mathbf{R}^m$ et $k \in \mathbf{R}^n$, la forme bilinéaire b définie par :

(1) $(h, k) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mapsto b(h, k) = h' T k$

vérifie les propriétés élémentaires suivantes :

(a) $b(e_i, e_j) = t_{ij}$ (terme générique du tableau), $\forall (i, j) \in \{1,..., m\} \times \{1,..., n\}$, où $e_i = (0,..., 0, 1, 0,..., 0)$ et $e_j = (0,..., 0, 1, 0,..., 0)$ sont les vecteurs de base dont les coordonnées sont toutes nulles, sauf celle d'indice i pour e_i et celle d'indice j pour e_j, chacune valant 1 ;

(b) $b(e_m, e_n) = \Sigma\, t_{ij}$ (total général du tableau), où $e_m = (1,..., 1)$ (resp $e_n = (1,..., 1)$) est le premier vecteur bissecteur de $\mathbf{R}^m$ (resp $\mathbf{R}^n$).