FORME QUADRATIQUE (A3)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Une **forme quadratique** (fq) q est une forme bilinéaire particulière définie sur le même espace (cf **forme multilinéaire**).

(i) Si E et F sont deux **espaces vectoriels** sur un corps **K**, on appelle **forme quadratique** (homogène) une application q : $E^2 \mapsto$ **K** tq il existe une forme bilinéaire b : E x F $\mapsto$ **K** vérifiant :

(a) F = E ;

(b) q (x) = b (x, x), $\forall$ x $\in E^2$.

(ii) Par extension, si l : E $\mapsto$ **K** est une **forme linéaire** et c : E $\mapsto$ **K** une application constante, on appelle **forme quadratique** (non homogène,ou inhomogène) la forme :

(1) $r(x) = q(x) + l(x) + c.$

(iii) Si E est de dimension finie Dim E = n, l'équation (1) s'exprime matriciellement sous la forme :

(2) $x' R x = x' Q x + L' x + C,$

où Q est la (n,n)-**matrice** de q dans une **base** donnée de E, L la (n,1)-matrice de l dans cette base et C la valeur de l'application l. En général, Q est une **matrice symétrique**.

(iv) En **Statistique**, une forme quadratique est souvent une **variable aléatoire** ou une **statistique** (eg **estimateur** d'une **variance** ou d'une **dispersion**), ou encore une **statistique de test**.

Ainsi, si $\xi \sim \mathcal{N}_K (\mu, \Sigma)$ (**loi normale**), on montre que la forme quadratique (non homogène) :

(3) $q(\xi) = \xi' A \xi + b' \xi + c \sim \Sigma_{j=1}^{p} \lambda_j \mathcal{X}_{tj}^{2} (n_j , a_j)$

ssi il existe d $\in$ $\mathbf{R}^K$ tq $\Sigma (b + A \mu) = \Sigma A \Sigma d$ et $\mu' A \mu + b' \mu + c = \Sigma_{j=1}^{p} \lambda_j a_j$, où les λ_j sont les valeurs propres (distinctes et non nulles) de Σ . A (ou de A . Σ), dont les ordres de multiplicité resp sont n_j (avec $\Sigma_{j=1}^{p} n_j = K - L$, où L est l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0), et où $\mathcal{X}_{tj}^{2} (n_j , a_j)$ est la **loi du chi-deux non centrale** à n_j **degrés de liberté** et à paramètre de non **centralité** :

(4) $a_j = (b + A \mu)' (Q A_j Q') (b + A \mu) / l \qquad \mathcal{X}^{2}_{tj}$

(où Σ = Q Q' est la **décomposition spectrale** de Q' A Q = $\Sigma_{j=1}^{p} \lambda_j A_j$).