

FORME RÉDUITE (J1)

(13 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **forme réduite** d'un **modèle à équations simultanées** exprime le vecteur η des G **variables endogènes** en fonction du vecteur ξ des K **variables exogènes** et du vecteur ε des G **perturbations aléatoires**.

(i) Si la **forme structurelle** est linéaire :

$$(1) \quad B \eta + C \xi = \varepsilon,$$

et si $\text{rg } B = G$ (matrice de plein **rang**), la **forme réduite** s'écrit (après prémultiplication par B^{-1}) :

$$(2) \quad \eta = -B^{-1} C \xi + B^{-1} \varepsilon.$$

(ii) La forme (2) permet d'exprimer la **loi de probabilité conditionnelle** de η pr à ξ en fonction (affine) de celle de ε . Autrement dit, (2) définit une **application** :

$$(3) \quad P^\varepsilon \in \mathcal{P}^\varepsilon \mapsto P^\eta \in \mathcal{P}^\eta \quad (\text{resp } P^\eta(. / \xi) \in \mathcal{P}^\eta)$$

de la **famille** $\mathcal{P}^\varepsilon$ des lp définies sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^G)$ vers la famille $\mathcal{P}^\eta$ des lp (resp des lp conditionnelles) définies sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^G)$, qui sont ainsi les images des lois P^ε par l'**application affine** (2).

Cette application est caractérisée par le fait que P^η (resp $P^\eta(. / \xi)$) dépend, outre les **paramètres** éventuels de la loi P^ε , des paramètres (B, C) de la forme structurelle.

On peut noter eg $P_{(B, C)}^\eta$ (resp $P_{(B, C)}^\eta(. / \xi)$) l'une quelconque de ces lois images.

(iii) Il est important qu'à deux couples distincts (B', C') et (B'', C'') correspondent deux lois $P_{(B', C')}^\eta$ et $P_{(B'', C'')}^\eta$ distinctes, ie que l'application :

$$(4) \quad (B, C) \in M_G(\mathbf{R}) \times M_{GK}(\mathbf{R}) \mapsto P_{(B, C)}^\eta \text{ (resp } P_{(B, C)}^\eta(. / \xi)) \in \mathcal{P}^\eta$$

soit une **application injective**.

C'est le problème de l'**identification** appliqué aux modèles d'interdépendance.

(iv) La **forme réduite** est analogue à un **modèle de régressions empilées**, lesquelles sont au nombre de G . On peut réécrire la forme réduite (2) selon :

$$(5) \quad \eta = A \xi + \varphi, \quad \text{avec } A = -B^{-1} C \text{ et } \varphi = B^{-1} \varepsilon.$$

Pour l'observation n , (5) s'écrit :

$$(6) \quad y_n = A x_n + v_n, \quad \forall n \in N_N^*,$$

et, pour la g-ième variable endogène, (5) s'écrit :

$$(7) \quad y_g = X A_g' + v_g, \quad \forall g \in N_G^*,$$

où $X = \{x_1' \dots x_N'\} \in M_{NK}(\mathbf{R})$, A_g est la g-ième ligne de A et v_g la g-ième colonne de $V = U (B')^{-1}$, avec $U = \{u_1', \dots, u_N'\}$.

Finalement, la forme réduite d'ensemble s'écrit :

$$(8) \quad Y = X A' + V, \quad \text{avec } Y = \{y_1', \dots, y_G'\} \in M_{NG}(\mathbf{R}).$$

(v) Les hypothèses stochastiques de la forme réduite se déduisent généralement de celles portant sur la forme structurelle.

Dans le cas d'un modèle « standard », ce sont :

$$(7) \quad \begin{aligned} E V &= 0, \\ E (V \otimes V') &= \Omega \otimes I_N, \quad \text{avec } \Omega = B^{-1} \Sigma (B')^{-1}. \end{aligned}$$

D'autres écritures de la forme (7) prennent explicitement en compte des **relations d'exclusion** et la **règle de normalisation**.

(vi) Si le modèle n'est pas linéaire, eg s'il est de la forme :

$$(8) \quad f_g(\eta, \xi, b_g) = \varepsilon_g, \quad \forall b_g \in \mathbf{R}^{Q(g)}, \quad \forall g \in N_G^*,$$

(dans laquelle $Q(g)$ désigne l'entier Q_g) et si le **théorème de la fonction implicite** est applicable, la forme réduite s'écrit, en général :

$$(9) \quad \eta_g = h_g(\eta_{(g)}, \xi, b_1, \dots, b_G, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_G), \quad \forall g \in N_G^*,$$

où $\eta_{(g)}$ désigne l'ensemble des autres variables endogènes apparaissant dans l'équation g.

Si les N observations du couple (ξ, η) sont notées (X, Y) , on obtient N . G équations analogues à (9).