FORMULE DE SHANNON (A2, G6)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ un **ensemble** fini (Card Ω = M) et $\Pi_\Omega = (\Omega_h)_{h=1,\ldots,H}$ une **partition** de Ω (avec $1 \leq H \leq M$). On pose Card $\Omega_h = M_h \geq 1$, $\forall$ h $\in N_H^*$, et :

(1) $\quad p_h = M_h / M, \qquad \forall h \in N_H^*,$

ce qui définit une « distribution » $p = (p_1, \ldots, p_H)$.

L'**indice** h étant donné, on considère un point $\omega \in \Omega_h$. Pour « identifier » cet élément ω dans Ω, une « information » supplémentaire, égale à (cf **formule de HARTLEY**) :

(2) $\quad H(\Omega_h) = \log_2 M_h ,$

est nécessaire. Par suite, pour identifier un élément $\omega \in \Omega$ sachant que $\omega \in \Omega_h$ (information conditionnelle), il faut en moyenne une quantité d'information égale à (cf **théorème des probabilités composées**) :

(3) $\quad H_2 = \Sigma_{h=1}^{H} (M_h / M) . \log_2 M_h .$

Enfin, pour identifier un élément $\omega \in \Omega$, quelle que soit la classe Ω_h à laquelle il appartient, il faut une quantité d'information égale à :

(4) $\quad H_1 = - \Sigma_{h=1}^{H} (M_h / M) . \log_2 (M_h / M).$

(ii) Les relations (3) et (4) permettent à la notion d'**information de HARTLEY** d'être conservée car $H_1 + H_2 = \log_2 M = H(\Omega)$ (information de HARTLEY relative à Ω).

On appelle **formule de C.E. SHANNON**, ou **formule de C.E. SHANNON - N. WIENER**, la relation :

(5) $\quad H_S = H_1 = \Sigma_{h=1}^{H} p_h . \log_2 (1 / p_h),$

qui définit l'**entropie** de la distribution p.

En particulier, si $p_h = 1 / H$, $\forall$ h $\in N_H^*$, on obtient $H_S = H(\Omega)$ (ie les formules de HARTLEY et de SHANNON coïncident).

(iii) On montre que :

(a) H_S ne dépend que de $p \in S_H$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^H$). On note donc aussi $H_S(p)$ ou $I_S(p)$;

(b) $H_S(p) = H_S(\sigma_H(p))$, $\forall \sigma_H \in \boldsymbol{\sigma}_H$ (groupe des **permutations** de N_H^*) (propriété de symétrie de H_S) ;

(c) si $H = 2$, $H_S (p_1 , 1 - p_1)$ est une fonction continue de $p_1 \in [0, 1]$ (cf **application continue**) et elle vérifie la propriété $H_S (1/2, 1/2) = 1$;

(d) $H_S (p) = H_S (p_1 + p_2, p_3 ,..., p_H) + (p_1 + p_2) . H_S \{(p_1 + p_2)^{-1} p_1 ,..., (p_1 + p_2) p_H\}$.