HIÉRARCHIE (A3, K9)
(08 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **hiérarchie** se relie notamment :

(a) aux **classifications** : cf **classification emboîtée**, **analyse hiérarchique**, **agrégation selon la variance** ;

(b) aux **plans d'expérience** : cf **plan hiérarchisé** ;

(c) aux **plans de sondage** : cf **sondage emboîté**, **sondage à plusieurs degrés** ;

(d) ou encore aux tests : cf **suite d'hypothèses emboîtées**.

(i) Soit E un **ensemble** quelconque et $\mathscr{P}$(E) la **famille** des **parties** de E.

On dit que $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}(E)$ est une **hiérarchie** sur E ssi :

$E \in \mathscr{H}$;

(1) $x \in E \Rightarrow \{x\} \in \mathscr{H}$;

$(H', H'') \in \mathscr{H}^2$ et $H' \cap H'' \neq \varnothing \Rightarrow$ soit $H' \subset H''$, soit $H'' \subset H'$.

Le couple (E, $\mathscr{H}$) est dit **espace à hiérarchie**, ou **espace hiérarchisé**.

(ii) Une **hiérarchie à indice**, ou **hiérarchie indicée**, sur E est une hiérarchie $\mathscr{H}$ sur E tq il existe une fonction $i : \mathscr{H} \mapsto \mathbf{R}_+$, dite **indice** de $\mathscr{H}$, compatible avec $\mathscr{H}$, ie vérifiant les deux propriétés suivantes (cf aussi **indice**) :

(a) $\{x\} \in \mathscr{H} \Rightarrow i(\{x\}) = 0$ (ou $H \in \mathscr{H}$ et Card $H = 1 \Rightarrow i(H) = 0$) ;

(b) $(H', H'') \in \mathscr{H}^2$ et $H' \subset H'' \Rightarrow i(H') \leq i(H'')$.

Le couple (E, $\mathscr{H}$) est alors appelé **espace à hiérarchie indicée**.

On montre que (E, $\mathscr{H}$) est un espace à hiérarchie indicée ssi il existe une **distance ultramétrique** d sur E, ie ssi (E, d) est un **espace ultramétrique**.

Dans la définition d'une hiérarchie, on peut remplacer la troisième condition de la définition (1) par :

$H' \cap H'' \in \{H', H'', \varnothing\}, \ \forall (H', H'') \in \mathscr{H}^2$.

Enfin, l'inclusion $\subset$ induit sur $\mathscr{H}$ un ordre partiel (cf **relation d'ordre**). En pratique, l'indice i permet de valuer les **degrés de la hiérarchie** (ie ses éléments) en fonction de l'intensité de la liaison entre éléments de E (**unités statistiques**).