IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE (A3)
(27 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E et F deux **espaces vectoriels** sur un même corps **K** et soit $f \in \text{Hom}(E, F)$ une **application linéaire** (ie un **homomorphisme**) de E dans F.

On appelle **image directe**, ou simplement **image**, de E par f la variété linéaire de F définie par :

(1) $\quad \text{Im } f = f(E) = \{y \in F : y = f(x), \forall x \in E\} \lhd F$ (sous espace vectoriel de F).

(ii) Soit E un **ev** de dimension n et F de dimension m. On note A la **matrice** de f dans des **bases** données de E et F, et $L(A) = L(a_1, ..., a_n)$ la variété engendrée par les vecteurs colonnes a_i de A. On identifie souvent L (A) avec l'image de f, ie :

(2) $\quad \text{Im } A = \text{Im } L(A) = \text{Im } f$,

et Im A est ainsi définie comme l'image de la matrice A.

Ces images vérifient les propriétés suivantes :

(a) si F = E et m = n, alors $A \in R_n(\mathbf{K}) \Rightarrow L(A) = E$;

(b) si $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$ et $B \in M_{np}(\mathbf{K})$, alors :

(3) $\quad \text{Im}(A B) \lhd \text{Im } A$;

De plus, si rg (A B) = rg A, il y a identité dans (3) : ie Im (A B) = Im A. En particulier, Im (A A') = Im A ;

(c) si $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$ et $B \in M_{mn}(\mathbf{K})$, il existe $C \in M_n(\mathbf{K})$ tq :

(4) $\quad A C = B \Leftrightarrow \text{Im } B \lhd \text{Im } A$,

et il existe $R \in R_n(\mathbf{K})$ tq :

(5) $\quad A R = B \Leftrightarrow \text{Im } A = \text{Im } B$.