INÉGALITÉ(S) DE BERNSTEIN (B05, C13)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Les **inégalités de BERNSTEIN** fournissent une meilleure évaluation des probabilités d'erreur que l'**inégalité de BIENAYMÉ-CHEBICHEV**.

(i) Soit $X = (X_1, ..., X_N)$ une **suite** de **vars** indépendantes, définies sur le même **espace probabilisé** $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. On pose $E\ X_n = \mu_n$ et $V\ X_n = \sigma_n^2$, $\forall\ n \in N_N^*$, et l'on suppose que la suite des va centrées (cf **variable centrée**) est uniformément bornée, ie que :

(1) $\quad |X_n - \mu_n| \leq K, \qquad \forall\ n \in N_N^*$.

On établit alors l'**inégalité de S.N. BERNSTEIN** :

(2) $\quad P\ (N^{-1}\ |\Sigma_{n=1}^{N}\ (X_n - \mu_n)| \geq \lambda\ .\ \sigma_n) \leq 2\ .\ \exp\ \{- \lambda^2\ /\ B\ (K, \lambda, \sigma)\}$, pour tout $\lambda > 0$,

avec $B\ (K, \lambda, \sigma) = 2\ .\ \{1 + (\lambda\ K)\ /\ (2\ \sigma_n)\}^2$.

(ii) Selon une autre inégalité de même nom, on considère une **vars** de carré intégrable ξ, avec $E\ \xi = \mu$ et $V\ \xi = \sigma^2$. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbf{N}^* \setminus \{2\}$ et un nombre (qui peut dépendre de p) $M_p > 0$ tq que le **moment absolu** d'ordre p de ξ (ie $\mu_p' = E\ |\xi - E\ \xi|^p$) vérifie l'inégalité :

(3) $\quad \mu_p' \leq (1/2)\ p\ !\ \sigma^2\ M_p^{p-2}$.

Alors, l'**inégalité de S.N. BERNSTEIN** s'écrit :

(4) $\quad P\ ([|\xi - \mu| > \lambda\ \sigma]) \leq 2\ .\ \exp\ \{- (1/2)\ \lambda^2\ \sigma^2\ /\ (\sigma^2 + M_p\ \lambda\ \sigma)\}, \qquad \forall\ \lambda > 0$.