

INEGALITÉ DE BIENAYMÉ - CHEBYCHEV (B5, C13, E)

(25 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'inégalité de BIENAYMÉ - CHEBYCHEV est une inégalité classique du **calcul des probabilités**, souvent utilisée en **Statistique**, eg : étude de la **convergence** des **suites** de **variables aléatoires**, étude des **régions de confiance**, calculs de majorants d'**erreurs**, etc.

Il en existe quelques versions, dont les plus classiques sont les suivantes (cf **inégalité de MARKOV**).

(i) Soit $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une **vars** de carré intégrable et $\sigma^2 = V \xi$ sa **variance**. On a, par définition, $\forall \lambda > 0$:

$$V \xi = E (\xi - E \xi)^2 = E \{ \mathbf{1}_{|\xi - E \xi| \geq \lambda} \cdot (\xi - E \xi)^2 \} + E \{ \mathbf{1}_{|\xi - E \xi| < \lambda} \cdot (\xi - E \xi)^2 \}.$$

Le second terme étant non négatif, on en déduit :

$$V \xi \geq E (\mathbf{1}_{|\xi - E \xi| \geq \lambda} \cdot (\xi - E \xi)^2).$$

Comme $|\xi - E \xi| \geq \lambda$ implique $(\xi - E \xi)^2 \geq \lambda^2$, on obtient :

$$V \xi \geq \lambda^2 \cdot E (\mathbf{1}_{|\xi - E \xi| \geq \lambda}) \text{ ou encore } V \xi \geq \lambda^2 \cdot P (|\xi - E \xi| \geq \lambda).$$

L'inégalité élémentaire de I.J. BIENAYMÉ - P.L. CHEBYCHEV s'écrit alors :

$$(0) \quad P (|\xi - E \xi| \geq \lambda) \leq \lambda^{-2} \cdot V \xi, \quad \forall \lambda > 0.$$

(ii) Soit $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une vars de carré intégrable et $\sigma^2 = V \xi$. L'inégalité de I.J. BIENAYMÉ - P.L. CHEBYCHEV s'écrit :

$$(1) \quad P (|\xi - E \xi| \geq \lambda \sigma) \leq \lambda^{-2}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Si $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et si $C \xi$ est un **paramètre de centralité** de ξ , (1) se généralise sous la forme :

$$(2) \quad P (|\xi - C \xi| \geq \lambda \cdot E |\xi - C \xi|^p) \leq \lambda^{-p}, \quad \forall \lambda > 0.$$

(iii) Si $\varphi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}_+$ est une fonction **mesurable** tq $\varphi \circ \xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^+}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'inégalité de BIENAYMÉ-CHEBYCHEV s'écrit :

$$(3) \quad P ([\varphi (\xi) \geq \lambda]) \leq E \varphi (\xi) / \lambda, \quad \forall \lambda > 0.$$

(iv) Si $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^k}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on généralise (1) selon :

$$(4) \quad P(\|\xi - E\xi\| \geq \lambda) \leq \lambda^{-2} \text{tr}(V\xi), \quad \forall \lambda > 0,$$

et l'on établit aussi l'inégalité suivante :

$$(5) \quad P([\xi - E\xi]'(V\xi)^{-1}(\xi - E\xi) \geq \lambda^2] \leq \lambda^{-2}, \quad \forall \lambda > 0.$$

(v) Soit $(E, \mathcal{A})$ un **espace mesurable** muni d'une **mesure positive** μ , $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A}$ -mesurable et $\alpha > 0$ un nombre réel tq $\mu_\alpha = \int |f|^\alpha d\mu < \infty$ (ie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^\alpha(E, \mathcal{A}, \mu)$).

L'inégalité de **BIENAYMÉ-CHEBYCHEV** s'écrit alors :

$$(6) \quad \mu(A_\lambda) \leq \lambda^{-\alpha} \cdot \mu_\alpha, \quad \forall \lambda > 0, \quad \text{avec } A_\lambda = \{x \in E : |f(x)| \geq \lambda\}.$$

De même, s'il existe un nombre un $p \geq 1$ tq $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, l'inégalité de **BIENAYMÉ-CHEBYCHEV** s'écrit aussi :

$$(7) \quad \mu(A_\lambda) \leq \lambda^{-p} \{N_p(f)\}^p, \quad \forall \lambda > 0,$$

où $N_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ est la **norme** usuelle dans **L^p** , et où A_λ est défini comme en (6).

(vii) L'inégalité de Bienaymé-Chebychev possède l'intérêt de ne pas nécessiter la connaissance explicite de la **probabilité** P ou de la **mesure** μ , ce qui s'avère souvent utile : eg en **Statistique non paramétrique**. Elle ne peut, en général, fournir que des majorations « larges ». Cependant, celles-ci sont souvent suffisantes pour démontrer des résultats importants : **loi des grands nombres**, **théorème de la limite centrale**.

(viii) En raison de l'intérêt de cette inégalité, de nombreuses variantes visent à en améliorer les propriétés (ie à minimiser la majoration) : **inégalité de BERGE**, **inégalité de BERNSTEIN**, **inégalité de BIRNBAUM**, **inégalité de CAMP-MEIDELL**, **inégalité de CANTELLI**, **inégalité de GAUSS-WINCKLER** ou encore **inégalité de PEEK**.