INÉGALITÉ DE JENSEN (C13)
(24 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\mathcal{X}$ un **espace vectoriel** réel de dimension finie K, $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ un **vecteur aléatoire** et C une **partie convexe** de $\mathcal{X}$.

Toute **fonction numérique** $\varphi : C \mapsto \mathbf{R}$ **continue** et **convexe** sur C vérifie l'**inégalité de J.L.W.V. JENSEN** suivante :

(1) $\quad E\, \varphi(\xi) \geq \varphi(E\, \xi)$, P-p.s.

(ii) Plus généralement, dans le même cadre, on note $(e_k)_{k=1,\ldots,K}$ la **base canonique** de $\mathcal{X}$), $\xi = \Sigma_k\, \xi_k\, e_k$ la décomposition de ξ dans cette base et :

(2) $\quad E(\xi / \mathcal{S}) = \Sigma_k\, E(\xi_k / \mathcal{S})\, e_k$

l'**espérance conditionnelle** de ξ pr à une **sous-tribu** $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$.

Par suite, sous les conditions suivantes :

(a) ξ et un représentant de la classe $E(\xi / \mathcal{S})$ sont à valeurs dans C et intégrables ;

(b) $\varphi(\xi)$ est intégrable,

on établit l'**inégalité de JENSEN conditionnelle** :

(3) $\quad E(\varphi(\xi) / \mathcal{S}) \geq \varphi\{E(\xi / \mathcal{S})\}$, P-p.s..

(iii) A titre d'exemple, soit $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^{2}(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\mathcal{S}$ une sous-tribu de $\mathcal{T}$, $E(\xi / \mathcal{S}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^{2}(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et $\varphi : u \mapsto u^2$.

On établit alors la **propriété de D.P. BLACKWELL - C.R. RAO** :

(4)
$$E(E(\xi / \mathcal{S}))^2 \leq E\, \xi^2,$$
$$V(E(\xi / \mathcal{S})) \leq V\, \xi.$$

D'après le **théorème de KOENIG**, toute **vars** $\mathcal{S}$-mesurable $\eta \in L_{\mathbf{R}}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$ vérifie :

(5) $\quad E (\xi - \eta)^2 = E (\xi - E (\xi / \mathcal{S})^2 + E (\eta - E (\xi / \mathcal{S}))^2.$

Par suite (cf aussi **théorème de BLACKWELL-RAO**) :

(6) $\quad E (\xi - \eta)^2 \geq E \{\xi - E (\xi / \mathcal{S})\}^2.$