

INÉGALITÉ VECTORIELLE (A3, A4, A11)

(24 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On note souvent :

$$(a) x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in N_n^* ;$$

$$(b) x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ et } y \neq x ;$$

$$(c) x \ll y \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i \in N_n^* .$$

Lorsque $n = 1$, la dernière notation ($x < y$) ne doit pas être confondue avec $x \ll y$, qui signifie que x est « petit » devant y , ou y est « grand » devant x (cf aussi **partie floue**).

(ii) Les notations précédentes sont encore utilisées dans le cas général où $E = \prod_{i=1}^n E_i$ et où $(E_i)_{i=1, \dots, n}$ est une **suite** (finie) d'ensembles, chacun d'eux étant doté d'une **relation d'ordre** $\text{total} \leq_i$. On pose alors, $\forall (x, y) \in E^2$:

$$(a) x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq_i y_i, \forall i \in N_n^* ;$$

$$(b) x < y \Leftrightarrow x \leq_i y \text{ et } y \neq x ;$$

$$(c) x \ll y \Leftrightarrow x_i <_i y_i, \forall i \in N_n^* .$$

Ceci est vérifié eg lorsque $E_i = N_{p_i}^* = \{1, \dots, p_i\}$ (resp $E_i = \mathbf{N}$, resp $E_i = \mathbf{Z}$), $\forall i \in N_n^*$.

(iii) Enfin, si $E_i = E_0$ (muni d'un même ordre $\leq$) ($\forall i \in N_n^*$), on note :

$$(a) E = E_0^n \text{ la puissance cartésienne de } E_0 ;$$

$$(b) E_{\leq} = E_0^{n_{\leq}} = \{x \in E_0^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\} \text{ l'ensemble des } n\text{-uples } (x_1, \dots, x_n) = x \text{ tq } x_i \leq x_{i+1}, \forall i \in N_{n-1}^* ;$$

$$(c) E_{<} = E_0^{n_{<}} = \{x \in E_0^n : x_1 < \dots < x_n\} \text{ l'ensemble des } n\text{-uples } x \text{ tq } x_i < x_{i+1}, \forall i \in N_{n-1}^* ;$$

$$(d) E_{\neq} = E_0^{n_{\neq}} = \{x \in E_0^n : x_i \neq x_j, \forall i \neq j\} \text{ l'ensemble des } n\text{-uples } x \text{ dont les coordonnées } x_i \text{ sont différentes deux à deux. } E_{=} = E_0^{n_{=}} = \{x \in E_0^n : x_i = x_0, \forall i\} \text{ est alors l'ensemble (complémentaire du précédent) des } x \text{ dont les coordonnées } x_i \text{ sont toutes égales (ie la « première bissectrice » de la puissance } E_0^n \text{).}$$