INÉGALITÉS DE CHERNOV (B5, C10, C13)
(12 / 06 / 2019)

Inégalités assurant de bonnes approximations pour des **mesures de probabilité**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de loi P^{ξ}. On définit une **fonction** $\varphi : \mathbf{R} \mapsto \overline{\mathbf{R}}$ en posant :

(1) $\quad \alpha \mapsto \varphi(\alpha) = \mathrm{Log}\,(E\, e^{\alpha \xi}) = \mathrm{Log} \int_{\mathbf{R}} e^{\alpha x}\, dP^{\xi}(x).$

On suppose que $\varphi(\alpha)$ est finie sur un **voisinage** V_0 de zéro, ie en tout point $\alpha \in V_0$, et l'on définit la **« fonction conjuguée »** ψ de φ selon :

(2) $\quad \psi(t) = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} (\alpha t - \varphi(\alpha)), \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}.$

Alors, si $E\, e^{\alpha \xi}$ est finie sur V_0 , les **inégalités de H. CHERNOV** s'écrivent :

(3)
$$a > E\,\xi \Rightarrow P([\xi \geq a]) \leq e^{-\psi(a)},$$
$$b < E\,\xi \Rightarrow P([\xi \leq b]) \leq e^{-\psi(b)}.$$

(ii) Ces inégalités servent à établir de nombreuses propriétés.

Ainsi, si une **suite** de vars $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite iid** selon la loi P^{ξ} et tq :

(4) $\quad E \exp(\alpha X_n) = E\, e^{\alpha \xi} < \infty, \qquad \forall\, \alpha \in V_0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbf{N},$

on établit les inégalités suivantes, $\forall\, N \in \mathbf{N}^*$:

(5)
$$a > E\,\xi \Rightarrow P(\,\overline{X}_N \geq a\,) \leq e^{-N\psi(a)},$$
$$b < E\,\xi \Rightarrow P(\,\overline{X}_N \leq b\,) \leq e^{-N\psi(b)},$$

où $\overline{X}_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^{N} X_n$ désigne la **moyenne empirique** des N premières variables de la suite X.