

INFORMATION STATISTIQUE (G6)

(08 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion d'**information statistique** est un concept général de la **théorie de l'information**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **modèle statistique**, $(\mathcal{F}, +)$ un **groupe** additif abélien muni d'une **relation d'ordre** $\leq$ et $\mathcal{G}$ la classe des sous-tribus de $\mathcal{F}$ (cf **tribu de parties**).

On appelle **fonction d'information**, ou **fonction informative**, toute application $I : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{F}$ vérifiant certains axiomes. Les plus usuels sont les suivants :

(a) si $\mathcal{S}$ est une sous-tribu libre de $\mathcal{F}$, $I(\mathcal{S}) = 0$, et inversement (cf **liberté**) ;

(b) si $\mathcal{R}$ est une **sous-tribu exhaustive** de $\mathcal{F}$, $I(\mathcal{R}) = I(\mathcal{F})$. En sens inverse, si $\mathcal{R}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et si $I(\mathcal{R}) = 0$, alors $\mathcal{R}$ est exhaustive ;

(c) pour toute sous-tribu $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, on a $I(\mathcal{U}) \leq I(\mathcal{F})$;

(d) si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux sous-tribus indépendantes et si $\mathcal{V}$ est la sous-tribu **engendrée** par $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, alors $I(\mathcal{V}) = I(\mathcal{R}) + I(\mathcal{S})$ (**additivité de l'information**).

(ii) De manière analogue, on peut définir l'information apportée par une statistique S , fondée sur l'**application mesurable** $s : \Omega \mapsto \mathcal{Y}$ et à valeurs dans un espace auxiliaire $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$, à partir des sous-tribus induites sur $\mathcal{F}$ par S (cf aussi **structure engendrée**).

De même, on peut étendre les conditions précédentes aux sous-tribus conditionnelles de $\mathcal{F}$.

(iii) Ce qui précède se transpose au cas d'un **modèle image** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$, associé au modèle de base $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ par une **va (statistique ou échantillon)** $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.