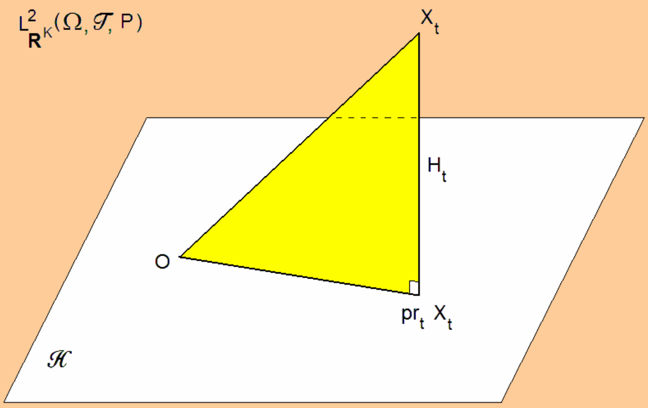
INNOVATION D'UN PROCESSUS (N)
(17 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit X = $\{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** à **espace d'état** $(\mathscr{X}, \mathscr{B}) = (\mathbf{R}^K, \mathscr{B}(\mathbf{R}^K))$, supposé du second ordre (ie tq $X_t \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}^K}^2(\Omega,\mathscr{T},P)$, $\forall t \in T$) et dont le **temps** T est totalement ordonné par une **relation d'ordre** $<$. On note, $\forall t \in T$, $\mathscr{H}_t$ (ou $\mathscr{H}_t(X)$) le sous-espace hilbertien de $L_{\mathbf{R}^K}^2(\Omega,\mathscr{T},P)$ engendré par la famille $(X_s)_{s<t}$, ie $\mathscr{H}_t = \sigma\{X_s : s < t\} \lhd L_{\mathbf{R}^K}^2$ (cf **espace de HILBERT**)

On appelle **innovation de X à la date t**, ou **innovation de X_t**, la **variable aléatoire** :

(1) $\quad H_t = X_t - pr_t X_t$,

où pr_t désigne le **projecteur** orthogonal (au sens de $L_{\mathbf{R}^K}^2$) de $L_{\mathbf{R}^K}^2$ sur $\mathscr{H}_t$ (cf schéma ci-après).



On appelle **(processus d')innovation** de X (ou associé à X) le processus $H = (H_t)_{t \in T}$ ainsi défini.

(ii) A titre d'exemple, si X est en temps discret T = **Z**, $\mathscr{H}_t(X)$ est le sous-espace (fermé) de $L_{\mathbf{R}^K}^2$ engendré par $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ et l'on note $X_t^{\perp}$ la projection orthogonale (au sens du produit scalaire dans L^2) de X_t sur $\mathscr{H}_t(X)$ (cf **projecteur**). Le processus $X^{\perp} = (X_t^{\perp})_{t \in T}$ ainsi défini constitue la **meilleure prévision**, ou **meilleure approximation**, **linéaire** de X, compte tenu des informations $\mathscr{H}_s(X)$ ($\forall s \le t$).

Le **processus d'innovation**, ou **processus des innovations**, de X est alors le processus $U = (U_t)_{t \in T}$ défini par :

(2) $\quad U_t = X_t - X_t^{\perp}, \qquad \forall t \in T.$

On a donc, par définition :

$$(3) \quad \begin{cases} s \leq t \ \Rightarrow \ U_t \perp \mathcal{H}_s (X), \\ t \neq s \ \Rightarrow \ U_t \perp U_s \end{cases}$$

(où l'orthogonalité s'entend au sens du **produit scalaire** précédent).

(iii) Si X est un **processus stationnaire en covariance** et s'il se décompose selon X = (Y, Z), on peut notamment définir diverses notions de **causalité** :

(a) ainsi, Z ne cause pas Y **au sens de C.W.J. GRANGER** ssi la projection des coordonnées de Y_t sur $\mathcal{H}_t (X)$ appartient à $\mathcal{H}_t (Y)$, $\forall\ t \in T$: ie la meilleure prévision linéaire de Y par tout le passé de X est identique à la meilleure prévision linéaire de Y par son propre passé.

(b) de plus, si l'on décompose U = (V, W) conformément à X = (Y, Z), on dit que Z ne cause pas Y **au sens de C.A. SIMS** ssi la projection de Y_t sur $\mathcal{H}_t (U)$ (définie de façon analogue à $\mathcal{H}_t (X)$) appartient à $\mathcal{H}_t (V)$, $\forall\ t \in T$.