INTÉGRABILITÉ UNIFORME (A5, N)
(23 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $\{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** tq $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$.

On dit que $X = (X_t)_{t \in T}$ est une **famille uniformément intégrable** (de va) ssi :

(1) $\lim_{n \to +\infty, n \in \mathbf{N}} E\{\mathbf{1}(A_n(t)) . |X_t|\} = 0$

uniformément sur T, où, $\forall t \in T$, $A_n(t)$ désigne l'**événement aléatoire** :

(2) $A_n(t) = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \geq n\}$.

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tq :

(3) $n > N_\varepsilon \Rightarrow \int_{An(t)} |X_t| \, dP < \varepsilon, \qquad \forall t \in T$,

où An (t) désigne $A_n(t)$.

(ii) On montre que X est uniformément intégrable ssi, à la fois :

(a) la fonction $t \mapsto E|X_t|$ est uniformément bornée sur T ;

(b) pour tout **événement** p-probable A_p (ie équiprobabble et tq $P(A_p) = p \in]0, 1[$), X vérifie :

(4) $\lim_{p \to 0+, p \in]0,1[} E\{\mathbf{1}(A_p) . |X_t|\} = 0$.