INTÉGRALE D'UNE FONCTION VECTORIELLE (A5)
(03 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'**intégrale d'une fonction vectorielle** généralise la notion d'intégrale « ordinaire », relative à une fonction « scalaire » (**fonction numérique** le plus souvent).

(i) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace topologique** supposé être un **espace localement compact**, μ une **mesure de RADON** positive sur E, F un **espace vectoriel topologique** réel, séparé et localement convexe (cf **espace séparé**, **partie convexe**), et F' son **dual** topologique. Pour toute fonction vectorielle f : E $\mapsto$ F, on pose :

(1) $\quad < y', f > \; = \; y' \circ f$ ou $y'(f)$.

On dit alors que f : E $\mapsto$ F est une **fonction scalairement μ-intégrable** ssi, $\forall$ y' $\in$ F', la **fonction numérique** y' o f est μ-intégrable (au sens usuel), ie ssi y' o f $\in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{1}$ (E, $\mathcal{A}$, μ), $\forall$ y' $\in$ F', où $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{O})$ désigne la **tribu borélienne** de E.

On appelle alors **intégrale de la fonction vectorielle** f pr à la mesure μ l'élément, unique, b $\in$ F défini par :

(2) $\quad < y', b > \; = \int (y' \circ f)\, d\mu, \qquad \forall y' \in F'$.

L'élément b est couramment noté $\int f\, d\mu$, ou $\int f(x)\, d\mu(x)$, etc.

Si (F, ||.||) est un **espace de BANACH** réel dont la **norme** est notée ||.||, et si l'on note ||f|| l'application E $\mapsto$ **R** définie par x $\mapsto$ ||f (x)||, alors on note $\mathscr{L}_F^{p}$ (E,$\mathcal{A}$,μ), ou $\mathscr{L}_F^{p}$ (E,μ), ou simplement L_F^{p}, l'ensemble des applications f : E $\mapsto$ F tq :

(a) f est μ-mesurable ;

(b) il existe un réel p $\in$ [1, + ∞[tq l'intégrale $\int ||f||^{p}\, d\mu$ existe (ie est finie).

Cet ensemble est un espace vectoriel appelé espace des fonctions (vectorielles) de puissance p-ième intégrable.

(ii) Dans ce cadre, le **théorème de LEBESGUE** se généralise comme suit. Soit f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions $f_n \in \mathscr{L}_F^{p}$ (E, μ) et soit f_∞ : E $\mapsto$ F tq :

(a) la suite f converge (simplement) vers f_∞ , μ-p.p. ;

(b) il existe une fonction g : E $\mapsto$ $\overline{\mathbf{R}}_+$ tq g $\in \mathscr{L}^{p}$ (E, μ) et que :

(3) $||f_n|| \leq g$, μ-p.p. ($\forall$ n $\in$ **N**).

Alors $f_\infty \in \mathscr{L}_F^p(E,\mu)$ et l'on dit que f **converge en moyenne d'ordre p**, ce qui peut se noter :

(4) $f \to^{\mathscr{L}p} f_\infty$

(où, par commodité, $\mathscr{L}p$ désigne $\mathscr{L}^p$).

(iii) D'autres concepts se généralisent aussi : **théorème de FUBINI**, **mesure à densité**, **mesure image** ou **mesure induite**.

Ces généralisations utilisent ainsi la notion d'**intégrabilité scalaire** présentée ci-ddesus.