INTÉGRALE STOCHASTIQUE (N12)
(05 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'**intégrale stochastique** généralise l'intégrale ordinaire en ce que l'intégration des fonctions (éventuellement vectorielles) s'effectue pr à des « mesures aléatoires » (cf **mesure stochastique**).

Le principal problème consiste à définir et à décrire les propriétés de ces intégrales en sorte de définir des **variables aléatoires**. Il existe autant de types d'intégrale stochastique que de modes de **convergence stochastique** entre va.

On présente ici deux aspects de l'intégrale stochastique en moyenne quadratique (ou dans L^2).

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** tq :

(a) X est un processus réel scalaire (ie $(\mathscr{X}, \mathscr{B}) = (\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$), en **temps** continu (avec T =]0, 1]) ;

(b) X est de carré intégrable, ie $X_t \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2 (\Omega,\mathscr{T},P)$, $\forall$ t $\in$ T ;

(c) X est un **processus adapté** à une famille donnée $\mathscr{T} = (\mathscr{T}_t)_{t \in T}$ constituée de sous-**tribus** $\mathscr{T}_t$ de $\mathscr{T}$ (cf **filtration**) ;

(d) X est continu à droite en moyenne quadratique, ie (cf **processus continu dans L^p**) :

(1) $\lim_{t \downarrow s} E (X_t - X_s)^2 = \lim_{t \downarrow s} E (X_t^2 - X_s^2) \downarrow 0$;

(e) X est une **martingale**.

Sur l'**algèbre** $\mathscr{A}$ engendrée par les pavés de Ω x $\mathscr{T}$ de la forme :

(2) $C = A \times]s, t]$, où $A \in \mathscr{T}_t$,

on peut définir une fonction réelle m, aléatoire et additive, selon :

(3) $m (A \times I) = E\, \mathbf{1}_A (X_t - X_s)$, où I = [s, t[,

ainsi qu'une fonction réelle μ, positive et additive, selon :

(4) $\mu (A \times I) = E\, \mathbf{1}_A (X_t - X_s)^2 = E\, \mathbf{1}_A (X_t^2 - X_s^2)$.

On montre que :

(a) m est une **fonction à accroissements orthogonaux** sur A, ie :

$$(5)\qquad \forall\,(H, K) \in \mathscr{A}^2,\quad E\{m(H).\,m(K)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } H \cap K = \varnothing, \\ \mu(H) & \text{si } K = H\,; \end{cases}$$

(b) l'application $\mathbf{1}_H \mapsto m(H)$ est une isométrie de $L_{\mathbf{R}}^2(\Omega \times \mathscr{T}, \mathscr{B}, \mu)$ dans $L_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathscr{T}, P)$, où $\mathscr{B}$ désigne la **tribu engendrée** par les pavés tq (2) et $\mathbf{1}_A$ la **fonction indicatrice** d'une partie A ;

(c) la fonction μ, qui est σ-additive sur $\mathscr{A}$, se prolonge à $\mathscr{B}$ en une **mesure positive** dont la variation totale est $E(X_1^2 - X_0^2)$;

(d) m est σ-additive sur $\mathscr{A}$, au sens de $L_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathscr{T}, P)$;

(e) pour tout couple de **temps d'arrêt** étagés $(\theta, \tau) \in T^2$, on a :

$$(6)\qquad m(]\tau, \theta]) = X_\theta - X_\tau\,,$$

ainsi que :

$$(7)\qquad m(H \cap]0, \tau]) = m_{Xt^*}(H), \qquad \forall\, H \in A,$$

où Xt^* désigne X_t^* et $X^* = (X_t^*)_{t \in T}$ est le **processus arrêté** en t, ie le processus obtenu en arrêtant X à l'instant t : on note souvent $X_t^* = X_{t \wedge \tau}$, avec $t \wedge \tau = \inf(t, \tau)$.

Par suite, si $Y : (\Omega \times \mathscr{T}) \times T \mapsto \mathbf{R}$ est une fonction réelle $\mathscr{B}$-mesurable, définie sur $(\Omega, \mathscr{T}) \times [0, 1]$ et de carré intégrable pr à μ, on appelle **intégrale stochastique** (en moyenne quadratique) la **limite en moyenne quadratique** des intégrales des fonctions simples :

$$(8)\qquad Y_i = \Sigma_j\, c_{ij}\, \mathbf{1}(H_{ij}),$$

ie la limite des intégrales :

$$(9)\qquad \int Y_i\, dX = \Sigma_j\, c_{ij}\, m(H_{ij})$$

lorsque $Y_i \to Y$ dans $L_{\mathbf{R}}^2(\Omega \times \mathscr{T}, \mathscr{B}, \mu)$.

On dit alors que Y est **stochastiquement intégrable** (en moyenne quadratique) pr au processus X. On note l'intégrale stochastique selon $\int Y\, dX$, ou $\int Y_t\, dX_t$ (ou encore simplement $\int Y$ ou $\int Y_t$).

Pour tout couple de fonctions simples (Y_i, Y_j), on montre que :

(10) $\quad E\,(\int (Y_i - Y_j)\,dX)^2 \;=\; \int (Y_i - Y_j)^2\,d\mu.$

Par ailleurs :

(11) $\quad E\,(\int Y\,dX)^2 \;=\; \int Y^2\,d\mu.$

(ii) Etant donné un **espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, un **espace mesurable** $(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{\mathcal{U}})$, une **mesure σ-finie** positive μ définie sur $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ et l'**espace de HILBERT** $L_{\mathbf{C}}^2\,(\Omega, \mathcal{T}, P)$ des **va** complexes scalaires de carré intégrable, on dit que la famille (**fonction d'ensembles**) $X = (X_u)_{u \in \mathcal{B}(\mathcal{U})}$ d'éléments de $L_{\mathbf{C}}^2\,(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est une **mesure aléatoire orthogonale**, ou une **mesure à accroissements orthogonaux**, (élémentaire) ssi elle vérifie les trois propriétés suivantes :

(a) **additivité** simple : $X_{u \cup v} = X_u + X_v$, $\forall\,(u, v) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^2$ tq $u \cap v = \emptyset$;

(b) $X_\emptyset = 0$ et $E\,X_u = 0$, $\forall\,u \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ (P-p.s.) ;

(c) **orthogonalité** : $E\,X_u\,X_v = \mu\,(u \cap v)$, $\forall\,(u, v) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^2$.

On appelle parfois μ la **mesure de structure**, ou **mesure structurelle**, de l'intégrale stochastique qui va être définie.

La construction de celle-ci s'effectue en trois étapes :

(a) on considère des **fonctions étagées** $\varphi : \mathcal{U} \mapsto \mathbf{C}$, ie des fonctions de la forme (cf **fonction étagée**) :

(12) $\quad \varphi \;=\; \Sigma_i\,\varphi_i\,\mathbf{1}\,(u_i),$

où $u = (u_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une suite sur $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ et $\varphi = (\varphi_i)_{i=1,\ldots,n}$ une suite sur $\mathbf{C}$. On définit l'**intégrale stochastique** (simple) selon :

(13) $\quad Y$, ou $Y(\varphi)$, ou $Y_\varphi \;=\; \int \varphi\,(h)\,dX_h = \Sigma_i\,\varphi_i\,X_{ui}$,

en notant ui pour u_i ;

(b) en considérant le complété de l'espace constitué de ces fonctions étagées φ, on peut associer à chaque suite convergente de telles fonctions une suite d'intégrales simples du type (13). Sous certaines conditions, on montre que cette suite tend en moyenne quadratique vers une va appelée **intégrale stochastique** (en moyenne quadratique). Autrement dit, si :

(14) $\quad \varphi \;=\; (\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est tq $\varphi_n \;\to_{n \to +\infty}\; \varphi_\infty$,

alors :

(15) Y_n ou $Y(\varphi_n) = \int \varphi_n(h)\, dX_h \rightarrow^{L2} Y(\varphi_\infty) = \int v_\infty(h)\, dX_h$,

et $Y(\varphi_\infty)$ est, par définition, l'**intégrale stochastique** de la fonction mesurable φ_∞ pr à la mesure aléatoire X. Comme toute fonction mesurable φ_∞ est limite de suites tq $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on note :

(16) $Y(\varphi_\infty) = \int \varphi(t)\, dX_t$ ou $\int \varphi\, dX$ (m.q.).

On omet souvent de préciser que le membre de gauche est **limite en moyenne quadratique** (ou dans L^2, noté L2) de suites de fonctions simples.

(c) si l'on pose enfin :

(17) $X_u^* = \int \mathbf{1}_u(h)\, dX_h = \int_u dX_h$,

alors $X^* = (X_u^*)_{u \in \mathcal{B}(\mathcal{U})}$ est appelée **mesure stochastique (orthogonale)** et constitue une extension de la notion de mesure stochastique simple précédente.

L'intégrale stochastique (en moyenne quadratique) ainsi définie possède la plupart des propriétés de l'**intégrale** ordinaire, ie :

(a) linéarité (pr à l'argument) :

(18) $\int \{\alpha\, \varphi(h) + \beta\, \psi(h)\}\, dX_h = \alpha \int \varphi(h)\, dX_h + \beta \int \psi(h)\, dX_h$,

ie $Y(\alpha\, \varphi + \beta\, \psi) = \alpha\, Y_\varphi + \beta\, Y_\psi$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ et $\forall (\varphi, \psi)$;

(b) additivité (simple) : si $(u, v) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}{}^2$ est tq $u \cap v = \varnothing$, alors :

(19) $\int \mathbf{1}(u \cup v)\, \varphi(h)\, dX_h = \int_u \varphi(h)\, dX_h + \int_v \varphi(h)\, dX_h$;

(c) linéarité (pr à la mesure stochastique) :

(20) $\int \varphi(h)\, d(\alpha\, X_h' + \beta\, X_h'') = \alpha \int \varphi(h)\, dX_h' + \beta \int \varphi(h)\, dX_h''$.

(iii) L'intégrale stochastique la plus classique est l'**intégrale stochastique de WIENER**. L'**intégrale stochastique de ITO** en est une généralisation.

(iv) La notion est très utilisée en **théorie des processus** (eg **analyse spectrale** ou **analyse cospectrale**, où la **représentation spectrale de CRAMER** joue un rôle important), ainsi que dans l'étude de l'**équation intégrale stochastique**.