INTÉGRALE STOCHASTIQUE DE ITO (A5, N12)

(08 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'intégrale stochastique de ITO est une **intégrale stochastique** qui généralise l'**intégrale stochastique de WIENER**.

Elle était initialement définie par au **processus du mouvement brownien** sous la forme :

$$(0) \quad I_F = \int F(\omega, t) dB(\omega, t),$$

où $B = (B_t)_{t \in T}$ est un **mouvement brownien** (avec $B_t(\cdot) = B(\cdot, t)$) et où l'on suppose notamment que $\int |F(\omega, t)|^2 dt < +\infty$, P-p.s..

(i) L'intégrale de ITO généralise l'intégrale de WIENER car elle permet d'intégrer un **processus** par rapport à un autre processus. Elle s'écrit, en effet, sous la forme :

$$(1) \quad Y \text{ ou } Y_\Phi = \int \Phi_t dX_t \text{ ou } \int \Phi dX.$$

(ii) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_\mathbf{C}), (X_t)_{t \in T}\}$ et $\Phi = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_\mathbf{C}), (\Phi_t)_{t \in T}\}$ deux processus complexes scalaires. On suppose que $T = \mathbf{R}$ et que :

(a) X est une **martingale** à laquelle est associée une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (avec $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$) (cf **filtration**). Par définition, la fonction $F : T \rightarrow \mathbf{R}$ associée à X est monotone, non décroissante et tq :

$$(2) \quad \forall (s, t) \in T^2_{<}, E |X_t - X_s|^2 = E \{|X_t - X_s| / \mathcal{F}_s\} = F(t) - F(s) \quad (\text{P-p.s.});$$

(b) T est muni d'une tribu (la **tribu borélienne**) $\mathcal{B}_T$, et la tribu produit $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$ est munie de la **mesure produit** $\mu \otimes P$;

(c) $\forall t \in T$, la seconde application partielle $\omega \mapsto \Phi(t, \omega)$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable ;

(d) enfin, $E \Phi_t^2 \in L_c^2(T, \mathcal{B}_T, dF)$, $\forall t \in T$.

Comme pour l'intégrale de WIENER, on définit l'**intégrale de K. ITO** par construction progressive, :

(a) on considère des fonctions en escalier $(t, \omega) \mapsto \Phi(t, \omega)$ définies sur $T \times \Omega$ (cf **fonction élémentaire**) ;

(b) puis l'on considère les limites de suites de fonctions en escalier du type précédent et l'on utilise les **normes** (indicateurs de **distances**) suivantes :

$$(3) \quad \begin{aligned} \|\Phi - \Psi\| &= \left\{ \int E |\Phi_t - \Psi_t|^2 dF(t) \right\}^{1/2}, \\ \|Y_\Phi - Y_\Psi\| &= \{E |Y_\Phi - Y_\Psi|^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Par construction, l'**intégrale de ITO** est tq :

$$(4) \quad \begin{aligned} E Y_\Phi &= 0, \\ E \{Y_\Phi \bar{Y}_\Psi\} &= \int E \Phi_t \bar{\Psi}_t dF(t). \end{aligned}$$

Cette définition s'étend au cas où $T \in \mathcal{I}(\mathbf{R})$ (intervalle de $\mathbf{R}$), ou à $\mathcal{B}_\mathbf{R}$, en considérant les fonctions $\Phi = \mathbf{1}_T \cdot \Psi$. On note alors :

$$(5) \quad Y \text{ ou } Y_\Phi = \int \mathbf{1}_T(t) \Psi_t dX_t = \int_T \Psi_t dX_t = \int \mathbf{1}_T \Psi dX = \int_T \Psi dX.$$

Elle se généralise à des processus plus généraux que X (eg en supposant notamment que F est une **fonction absolument continue**).