**INTÉGRALE STOCHASTIQUE DE RIEMANN (A5, N12)**
(31 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'**intégrale stochastique de RIEMANN** est l'**intégrale stochastique** la plus simple.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K)), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** en **temps** continu, avec $T = [a, b] \subset \mathbf{R}$ (intervalle de **R**).

On considère une suite $S = (S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de subdivisions de T de la forme :

(1) $\quad a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b,$

ainsi que la suite des **va** correspondantes, définies par les **sommes de G.F.B. RIEMANN** :

(2) $\quad Y_n = \Sigma_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) X_{t(i)}$ (où les t(i) désignent les $t_i$).

Si X est un processus continu en moyenne quadratique (cf **processus continu dans $\mathbf{L}^p$**), on montre qu'il existe une va $Y : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ notée :

(3) $\quad Y = \int_T X_t \, dt,$

tq, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \eta > 0$, il existe un entier $N_{\varepsilon,\eta} \in \mathbf{N}^*$ et une subdivision $S(N_{\varepsilon,\eta})$ de T tq :

(4) $\quad \sup (t_i - t_{i-1})_{i \in \{1,\ldots, N\varepsilon,\eta\}} < \varepsilon \Rightarrow E \, ||Y_n - Y||^2 < \eta.$

Y est appelée **intégrale stochastique de RIEMANN**.

(ii) On peut aussi définir l'intégrale stochastique Y à partir de la fonction :

(5) $\quad \omega \in \Omega \mapsto Y(\omega) = \int_T X_t(\omega) \, dt,$

supposée mesurable et à valeurs dans $L_{\mathbf{R}K}^2 (T, \mathcal{B}_T, dt)$.

(iii) On montre, de façon élémentaire, que si X' et X'' sont deux processus continus en moyenne quadratique et resp à valeurs dans les **espaces d'état** $\mathbf{R}^K$ et $\mathbf{R}^L$, alors la **covariance** entre les intégrales stochastiques :

(6) $\quad Y' = \int X_t' \, dt$ et $\quad Y'' = \int X'' \, dt$

s'écrit :

$$(7) \qquad C(Y', Y'') = \begin{cases} E\{\int (X_s' - M'(s))\,ds\} \,.\, \{\int (X_t'' - M''(t))\,dt\}^t, \\ \int_{T2} E\{(X_s' - M'(s))\,(X_t'' - M'(t))^t\,ds\,dt, \\ \int_{T2} C(X_s', X_t'')\,ds\,dt = \int_{T2} c(s, t)\,ds\,dt, \\ \int_{T2} c(s, t)\,ds\,dt, \end{cases}$$

où $c : T^2 \mapsto M_{KL}$ (**R**) est la **fonction de covariance** (cf aussi **covariance croisée**) entre X' et X", où $M'(t) = E\,X_t'$ et $M''(t)) = E\,X_t''$. On note aussi $A^t$ pour désigner la transposée d'une matrice A, et T2 pour désigner $T^2$.

(iv) On généralise directement les définitions et propriétés précédentes à une intégrale de RIEMANN de la forme :

$$(8) \qquad Y \text{ ou } Y_\varphi = \int_T X_t\,\varphi(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_T X\,\varphi\,dt,$$

en considérant les sommes :

$$(9) \qquad \Sigma_{i=1}^{n} \{f(t_i) - f(t_{i-1})\}\,X_{t(i)}\,,$$

en notant encore t(i) pour désigner $t_i$ . Par suite :

$$(10) \qquad C(Y_\varphi, Y_\psi) = \int_{T2} c(s, t)\,\varphi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt.$$