INTÉGRALE STOCHASTIQUE DE WIENER (A5, N12)
(18 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'**intégrale stochastique de WIENER** est un exemple d'**intégrale stochastique** définie initialement à partir du **mouvement brownien**. Les définitions qui suivent s'affranchissent de cette hypothèse. La première est une définition générale assez « compacte » ; la seconde présente un mode de construction élémentaire de l'intégrale.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{K}, \mathcal{B}_{\mathbf{K}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**. On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (resp $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) (processus réel scalaire), que $T \in \mathcal{I}(\mathbf{R})$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ et que X est un **processus à accroissements orthogonaux** réguliers à droite. On note $\mu \geq 0$ la **mesure de RADON** associée à X de façon unique, et tq :

$$(1) \quad \begin{cases} \mu(\{a\}) = 0 \text{ si T est un segment de la forme } [a, b], \\ \mu(]s, t]) = E\,|X_t - X_s|^2, \quad \forall (s, t) \in T^2_{\leq}. \end{cases}$$

On montre alors qu'il existe une **intégrale de N. WIENER (complexe)** unique W, définie sur $(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ et basée sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, tq :

$$(2) \quad W(\mathbf{1}_{]s,t]}) = X_t - X_s \quad (P\text{-p.s.}), \qquad \forall (s, t) \in T^2.$$

W est alors appelée **intégrale stochastique de N. WIENER** associée à X.

On appelle aussi **intégrale stochastique de N. WIENER** de la fonction $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ la valeur W (f) de W au « point » f. Cette valeur est notée :

$$(3) \quad W(f) = \int_T f(t)\, dX_t, \qquad \text{ou } \int f\, dX, \qquad \text{ou encore st.} \int f.$$

(ii) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un processus stochastique scalaire complexe. On suppose que $T = \mathbf{R}$, que X est un **processus à accroissements orthogonaux** et que sa fonction associée est F.

La définition de l'**intégrale stochastique de N. WIENER** s'effectue par construction en trois étapes :

(a) soit $\varphi : T \mapsto \mathbf{C}$ une fonction en escalier, ie de la forme (cf **fonction étagée**) :

$$(4) \quad \varphi = \Sigma_{i=1}^{n}\, \varphi_i\, \mathbf{1}([t_{i-1}, t_i[),$$

où $(t_0, t_1, ..., t_n)$ est une **suite** finie sur T (définissant une subdivision de T) et $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une suite finie sur $\mathbf{C}$.

Dans ce cas simple, on définit l'**intégrale stochastique** comme la **variable aléatoire** :

(5) $Y = \Sigma_{i=1}^{n} \varphi_i (X_{t(i)-} - X_{t(i-1)-})$,

où, $\forall$ i $\in N_n$*, t_i - est un instant tq il existe une va $X_{t(i)-}$ vérifiant :

(6) $X_s \to^{LC2} X_{t(i)-}$ lorsque $s \uparrow t_i$ - ,

ie X_{ti} - est la **limite en moyenne quadratique** (mq) ou dans L_C^2 de X_s lorsque $s \uparrow t_i$ (on a d'ailleurs, $X_{t(i)-} = X_{t(i)}$, p.s.). On note, par commodité, t(i) pour t_i , t(i) - pour t_i - et L**C**2 pour L_C^2.

On note donc :

(7) Y ou Y_φ , ou Y (φ) = $\int f\, dX$ ou $\int \varphi (t)\, dX_t$, etc ;

(b) dans ce qui précède, on a :

(8) $E\, Y_\varphi\, \bar{Y}_\psi = \int \varphi (t)\, \bar{\psi} (t)\, dF (t)$.

Si l'on définit la **distance** usuelle dans L_C^2 (T, $\mathscr{B}_T$, μ) selon :

(9) $||\varphi - \psi||_T = \{\int |\varphi - \psi|^2\, dF\}^{1/2}$,

et la distance usuelle dans L_C^2 (Ω,$\mathscr{T}$,P) selon :

(10) $||Y_\varphi - Y_\psi||_\Omega = \{E\, |Y_\varphi - Y_\psi|^2\}^{1/2}$,

on montre que l'application $\varphi \mapsto Y_\varphi$ de l'**espace de HILBERT** L_C^2 (T) dans l'espace de HILBERT L_C^2 (Ω) est une **application continue** pour les distances resp induites par les **normes** $||.||_T$ et $||.||_\Omega$ précédentes ;

(c) soit alors $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions en escalier φ_n du type précédent sur L_C^2 (T) et φ_∞ sa limite. On montre que la limite (en moyenne quadratique) Y (φ_∞) de la suite (Y $(\varphi_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ associée à la suite précédente existe et est unique (P-p.s.).

On définit ainsi l'**intégrale stochastique de N. WIENER** pour toute fonction ($\mathscr{B}_T$,$\mathscr{B}_C$)-mesurable f $\in L_C^2$. On note l'intégrale stochastique comme en (7).

(iii) La construction progressive précédente s'étend au cas où T $\in \mathscr{T}$(**R**) (intervalle de **R**) et au cas où T $\in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ en considérant des fonctions de la forme $\varphi = \mathbf{1}_T\, \psi$. Dans ce dernier cas, on note :

(11) Y, ou Y_φ , ou Y (φ) = $\int \mathbf{1}_T\, \varphi\, dX$ ou $\int_T \varphi\, dX$, ou $\int \mathbf{1}_T (t)\, \varphi (t)\, dX_t$, etc.

En considérant des intégrales de la forme :

(12) $Y_t (\varphi) = \int \varphi (t, s)\, dX_s$,

dans laquelle $\varphi : T^2 \mapsto \mathbf{C}$ est tq $\varphi \in L_{\mathbf{C}}^2 (T^2, \mathcal{B}_T^{\otimes 2}, \lambda_{/T} \otimes dF)$, on peut aussi associer à φ un processus stochastique $Y (\varphi) = (Y_t (\varphi))_{t \in T}$.

Si, dans (12), on choisit la fonction particulière :

(13) $\varphi (t, s) = e^{i t s}$ (ou parfois $e^{2\pi i t s}$),

le processus Y (φ) définit la **transformée de J.B.J. FOURIER** $Y_t (\varphi)$ de X. Ce processus joue un grand rôle en **analyse spectrale** (ou en **analyse cospectrale**) des **processus** (ou des **séries temporelles**).

On étend la définition au cas d'un **processus à accroissements non corrélés**. Si Z = $(Z_t)_{t \in T}$ est un tel processus, si $0 \in T$ et si l'on pose :

(14) $\gamma (t) = E (Z_t - Z_0), \quad \forall t \in T$,

le processus X défini par :

(15) $X_t = Z_t - \gamma (t), \quad \forall t \in T$,

parfois noté $X = Z - \gamma$, est un **processus à accroissements orthogonaux**. On définit alors l'**intégrale stochastique de N. WIENER** (pour un processus à accroissements non corrélés) selon :

(16) $\int \varphi\, dZ = \int \varphi\, dX + \int \varphi\, dm$,

ie $\int \varphi (t)\, dZ_t = \int \varphi (t)\, dX_t + \int \varphi (t)\, dm (t)$, chaque fois que l'intégrale $\int \varphi\, dm$ est définie (ceci est le cas eg lorsqu'il s'agit d'une intégrale de LEBESGUE-STIELTJES - cf **mesure de LEBESGUE-STIELTJES**), où m désigne la **mesure de WIENER**.

(iv) Enfin, l'intégrale stochastique s'étend aux **processus vectoriels** complexes X, ie aux processus à **espace d'état** $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$. Si T = [a, b], l'**intégrale stochastique de N. WIENER** s'écrit (sous forme vectorielle) :

(17) Y ou Y_Φ ou Y (Φ) = $\int_T \Phi (t)\, dX_t$ ou $\int \Phi\, dX$,

où $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus à accroissements orthogonaux et où $\Phi : T \mapsto M_K (\mathbf{C})$ est une fonction matricielle tq :

(18) $\mathrm{Tr}\, \{\int_T \Phi (t) . dF (t) . \Phi (t)^*\} < +\infty$

(où Tr A désigne la **trace** de la **matrice** A, et A* sa **matrice adjointe** ou transconjuguée). De plus, cette intégrale stochastique vérifie la propriété suivante :

(19) $E\,(Y_\Phi\, Y_\Psi^*) = \int_T \Phi\,(t)\, dF\,(t)\, \{\Psi\,(t)\}^2.$