INTERVALLE DE CONFIANCE POUR UN QUANTILE (C5, H)
(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** dont la loi P^{ξ} est supposée être une **loi absolument continue** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ. On cherche à déterminer un **intervalle de confiance** aléatoire pour le p-**quantile** $Q_p\, \xi$ de ξ, où $p \in]0, 1[$ est un nombre donné.

Soit $X = (X_1 ,..., X_N)$ un **échantillon iid** comme ξ et $X^{(.)}$ la **statistique d'ordre** associée à X.

On montre alors que $Q_p\, \xi$ vérifie, $\forall\ (\alpha, \beta) \in (N_N^*)^2$ (cf aussi **loi binômiale**) :

(1) $P([X^{(\alpha)} \leq Q_p\, \xi \leq X^{(\beta)}]) = \Sigma_{k=\alpha}{}^{\beta}\, C_N{}^k\, p^k\, (1 - p)^{N - k}$.

Soit $\alpha_0 \in]0, 1[$, avec $\alpha_0 << 1$, un seuil donné et $1 - \alpha_0$ le **coefficient de confiance** correspondant. S'il existe un couple (α, β) d'entiers de $\{1 ,..., N\}$ tq :

(2) $P([X^{(\alpha)} \leq Q_p\, \xi \leq X^{(\beta)}]) = 1 - \alpha_0$,

on dit que $[X^{(\alpha)}, X^{(\beta)}]$ est un **intervalle de confiance (asymétrique) pour le quantile** $Q_p\, \xi$ associé au coefficient de confiance $1 - \alpha_0$. L'ensemble {(1),(2)} se représente aussi sous la forme :

(1)' $P([X^{(\alpha)} \leq Q_p\, \xi \leq X^{(\beta)}]) = I_p(\alpha, N-\alpha+1) - I_p(\beta, N-\beta+1) = 1 - \alpha_0$,

dans laquelle $I_p(a, b)$ est la **fonction beta** incomplète :

(3) $I_p(a, b) = (B(a, b))^{-1} \int_{]0,p[} t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt, \qquad \forall\ p \in]0, 1[.$

Le plus souvent, on recherche un couple (α, β) tq :

(4) $I_p(\alpha, N-\alpha+1) - I_p(\beta, N-\beta+1) \geq 1 - \alpha_0$,

ou un intervalle de confiance symétrique (ie tq $\beta = N - \alpha + 1$).