INVARIANT (A3, A5, G)
(08 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ un **espace d'observation** et $\mathscr{G}$ un **groupe de transformations** mesurables g de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{X}$.

On dit que $x' \in \mathscr{X}$ est **équivalent** à $x'' \in \mathscr{X}$ ssi :

(1) $\exists\, g \in \mathscr{G}$ tq $x'' = g(x')$.

Les éléments g étant, par définition, des **applications bimesurables**, (1) équivaut à dire qu'il existe $h \in \mathscr{G}$ tq $x' = h(x'')$ et $h = g^{-1}$.

On note ~ la **relation d'équivalence** ainsi définie sur $\mathscr{X}$.

(ii) On appelle **orbite d'un élément**, ou **orbite d'un point**, $x \in \mathscr{X}$ sa **classe d'équivalence** pour ~, ie la classe O_x formée des éléments $x' \in \mathscr{X}$ équivalents à x :

(2) $O_x = \{x' \in \mathscr{X} : x' \sim x\} \subset \mathscr{X}$.

C'est donc un élément de l'ensemble quotient $\mathscr{X} / \sim$. Ainsi, $O_x \in \mathscr{X} / \sim$, $\forall\, x \in \mathscr{X}$, et la famille $(O_x)_{x \in \mathscr{X}}$ constitue une **partition** $\Pi_{\mathscr{X}}$ de $\mathscr{X}$.

(iii) Soit $\mathscr{Y}$ un **ensemble** quelconque.

On appelle **invariant** sur (ou de) $\mathscr{X}$ toute application $v : \mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}$ tq :

(3) $x' \sim x'' \Rightarrow v(x') = v(x'')$.

Autrement dit (cf aussi **équivariance**) :

(4) $x' \in O_x \Rightarrow v(x') = v(x)$.

Un **invariant** sur $\mathscr{X}$ est ainsi une **application constante** sur chaque orbite O_x .

(iv) Soit Θ l'ensemble des valeurs du paramètre (ou **états** de la **Nature**), ou « **paramétrage** », et $\overline{\mathscr{G}}$ le groupe de transformations induit sur Θ par le groupe $\mathscr{G}$.
On pose, de façon parallèle à ce qui précède :

(5) $\theta' \ \overline{\sim}\ \theta'' \Leftrightarrow \exists\, \overline{g} \in \overline{\mathscr{G}}$ tq $\theta'' = \overline{g}(\theta')$.

On appelle alors **orbite** de $\theta \in \Theta$ la classe d'équivalence :

(6) $O_\theta = \{\theta' \in \Theta : \theta' \mathrel{\bar{\sim}} \theta\} \subset \Theta$.

Ainsi, $O_\theta \in \Theta / \bar{\sim}$, $\forall\, \theta \in \Theta$.

Si Γ est un ensemble quelconque, on appelle **invariant** sur Θ toute application $\bar{v} : \Theta \mapsto \Gamma$ qui est constante sur les orbites O_θ, ie tq :

(7) $\theta' \mathrel{\bar{\sim}} \theta'' \Rightarrow \bar{v}(\theta') = \bar{v}(\theta'')$,

ou encore tq :

(8) $\theta' \in O_\theta \Rightarrow \bar{v}(\theta') = \bar{v}(\theta)$, $\forall\, \theta \in \Theta$.