

JACOBIEN, JACOBIEENNE (A3, A5, A7, C2)

(27 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit E et F deux **espace vectoriels normés** sur le corps K (avec $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$). On suppose que $\dim E = n$ et $\dim F = m$ (espaces de dimensions finies), que U est un **ouvert** de E , que $a \in U$ et que $f : U \rightarrow F$ est une application différentiable au point a (cf **différentiabilité**).

(i) La **dérivée** $f'(a)$ de f au point a , aussi notée $Df(a)$, est une **application linéaire** continue, ie un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Elle admet, dans les **bases canoniques** resp de E et F , une **matrice** $M = (m_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$ dont les éléments m_{ij} sont définis selon :

$$(1) \quad m_{ij} = (\partial f_i / \partial x_j)(a), \quad \forall (i, j) \in N_m^* \times N_n^*.$$

On dit que M est la **matrice de C.G.J. JACOBI**, ou la **matrice jacobienne**, ou simplement la **jacobienne**, associée à f au point $a \in U$.

M est souvent notée $J_a(f)$, ou $Jac_a(f)$, ou simplement J_a ou Jac_a s'il n'en résulte aucune ambiguïté.

On explicite souvent M au point $a \in U$ sous la forme $\{D(f_1, \dots, f_m) / D(x_1, \dots, x_n)\}(a_1, \dots, a_n)$, ou simplement $(Df / Dx)(a)$, $(\partial f / \partial x)(a)$ ou encore $f'(a)$.

(ii) Si $m = n$, alors $M \in M_n(\mathbf{R})$ et l'on appelle **déterminant jacobien**, ou simplement **jacobien**, de f au point a le **déterminant** $\text{Dét } M$ de M .

Ce nombre est aussi noté $\text{Dét } J_a(f)$, ou $\text{Dét } Jac_a(f)$, ou parfois même $|Jac_a(f)|$, ou encore $|J_a f|$, ou $\text{Dét } f'(a)$, etc.

(iii) Les notions précédentes sont souvent utilisées dans l'étude des fonctions à plusieurs variables, en topologie différentielle, et dans les **changements de variables dans les intégrales**. Elles interviennent aussi dans les questions d'**optimisation**.