JEU DIFFÉRENTIEL (A7, A14)
(08 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Un **jeu différentiel** est un **jeu** à plusieurs joueurs pour lequel les techniques d'**optimisation** des objectifs de chaque joueur sont fondées sur le calcul différentiel (cf **différentiabilité**).

(i) Un **jeu différentiel** à $n \geq 2$ joueurs consiste en la donnée :

(a) d'une fonction $f : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{M1} \times ... \times \mathbf{R}^{Mn} \mapsto \mathbf{R}^N$ et de parties $R \subset \mathbf{R}^N$ et $U_j \subset \mathbf{R}^{Mj}$ ($\forall\ j \in N_n^*$), ainsi que d'une partie $T \subset \mathbf{R}_+$ et d'un point privilégié $t_0 \in T$;

(b) de fonctions $\xi : T \mapsto \mathbf{R}$ et $\varphi_j : T \mapsto \mathbf{R}^{Mj}$ ($\forall\ j \in N^*_n$) définissant l'**équation différentielle** :

(1) $D\,x = f(x, u_1, ..., u_n)$, avec $\xi(t_0) = x_0$,

dans laquelle $u_j = \varphi_j(t) \in U_j$ est appelée **contrôle**, ou **commande**, du j-ième joueur et $x = \xi(t)$ est appelé **état du jeu**. L'**ensemble** $E = T \times R$ est appelé **ensemble des phases**, ou **espace des phases**, du jeu ;

(c) d'une **condition d'arrêt** du jeu. Si $C \in \mathscr{P}(E)$ est une **partie** donnée de E, le jeu s'arrête si $(t, \xi(t)) \in C$ à un certain instant $t \in T$ (cf **temps**, **temps d'arrêt**) ;

(d) de n fonctions $g_j : T \times R \times \mathscr{U}_1 \times ... \times \mathscr{U}_n \mapsto \mathbf{R}$, appelées **critères de performance** du jeu. Celles-ci sont souvent de la forme :

(2) $g_j(t_0, x_0, \varphi_1, ..., \varphi_n) = h_j(t, \xi(t)) + \int_{t0}^{\tau} k_j(\xi(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))\, dt$,

où $\mathscr{U}_j = \mathscr{A}(T, U_j)$ est l'ensemble des (fonctions de) commande(s) φ_j du joueur j ;

(e) de n **ensembles d'information** $Y_j(t)$, définis $\forall\ t \in T$, et de n **stratégies admissibles**, ie d'applications $\phi_j : T \times \cup_{t \in T} Y_j(t) \mapsto \mathbf{R}^{M(j)}$ (où M(j) désigne un entier positif M_j , $\forall\ j \in N_n^*$). Chaque joueur j décide d'adopter la commande $u_j = \varphi_j(t)$ en tenant compte de l'information $y_j(t) \in Y_j(t)$ dont il dispose à l'instant t :

(3) $u_j = \varphi_j(t) = \psi_j(t, y_j(t))$, $\forall\ (j, t) \in N_n^* \times T$.

(ii) Dans le cas où $\Sigma_j\, g_j(t_0, x_0, \varphi_1, ..., \varphi_n) = 0$, $\forall\ (t_0, x_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$, on parle de **jeu différentiel à n joueurs et somme nulle**.

Si f ou les φ_j sont des **applications aléatoires**, on parle aussi de **jeu différentiel stochastique** (cf **stochastique**). Dans ce type de jeux, on est souvent conduit à utiliser la **théorie des processus** et la notion d'**intégrale stochastique**.

(iii) L'approche intervient dans divers contextes, notamment :

(a) écologie : comportements animaux (appropriation de ressources : espaces, nutriments) ;

(b) sociologie : jeux collectifs (au sens ordinaire), stratégies politiques ou militaires, ou encore celles des entreprises économiques, etc.