JEU DIFFÉRENTIEL QUALITATIF (A7, A14)
(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Un jeu différentiel qualitatif est un **jeu différentiel** dans lequel les objectifs des joueurs sont complémentaires (au sens de l'inclusion ensembliste des **parties**), ie sont des **objectifs antinomiques**. On présente le cas d'un jeu à deux joueurs 1 et 2.

Soit $R \subset \mathbf{R}^N$, $U \subset \mathbf{R}^L$ et $V \subset \mathbf{R}^M$ trois parties données : R est appelée **ensemble terminal** (ou objectif du joueur 1) et U (resp V) est appelé **ensemble des contrôles réalisables** de 1 (resp de 2).

On considère comme donnée une application $f : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^L \times \mathbf{R}^M \mapsto \mathbf{R}^N$. Tout point $u \in U$ (resp $v \in V$) est appelé **contrôle**, ou **commande**, (**réalisable**) du joueur 1 (resp 2).

Un **jeu à deux joueurs différentiel qualitatif** est un jeu tq 1 cherche à réaliser l'objectif $x \in R$ à l'aide de la commande $u \in U$ dont il dispose, tandis que 2 cherche à réaliser l'objectif « opposé » $x \in R^c$ à l'aide de la commande $v \in V$, sachant que la variable d'état x et les commandes u et v satisfont à une **équation différentielle** de la forme :

(1) $D x = f(x, u, v)$.

Les hypothèses permettant de spécifier davantage le jeu sont souvent du type suivant :

(a) U et V sont **compacts** ;

(b) la restriction de f à $\mathbf{R}^N \times U \times V$ est **continue** ;

(c) pour tout compact K de $\mathbf{R}^N$, la restriction de f à $K \times U \times V$ est une **application lipschitzienne** pr à x. Il existe donc $m_K > 0$ tq :

(2) $\|f(x', u, v) - f(x'', u, v)\| \leq m_K \cdot \|x' - x''\|, \qquad \forall (x', x'')$;

(d) il existe $T \subset \mathbf{R}_+$, $\xi : T \mapsto \mathbf{R}^N$, $\varphi : T \mapsto U$ et $\psi : T \mapsto V$ tq (si $t_0 \in T$ est un instant privilégié) :

(3) $D\xi(t) = f(\xi(t), \varphi(t), \psi(t)), \qquad$ avec $\xi(t_0) = x_0$ (donné).

On dit que t_0 est l'**instant de début du jeu**, ou simplement **début du jeu**, et que φ (resp ψ) est la **(fonction de) contrôle**, ou la **(fonction de) commande**, du joueur 1 (resp 2).

Un tel jeu est dynamique car il est « gouverné » par une équation différentielle (l'équation (3)).