

JEU ÉQUITABLE (A14, E, N)

(09 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **jeu** qui est un **jeu à deux personnes** : eg une « banque » b et un « client » c. Le joueur b est supposé doté d'une ressource infinie. On note X_0 le capital (ou la « mise ») initial(e) du joueur c au début du jeu, et X_n ($n \in \mathbf{N}^*$) son **capital** (cumulé) lorsqu'il parie à l'instant n.

On définit ainsi un **processus** en temps discret $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. La différence $X_{n+1} - X_n \in \mathbf{R}$ représente le **gain net** (signé) de c entre deux paris consécutifs.

On suppose aussi que la notion d'**espérance conditionnelle** est définie.

On dit que le jeu précédent est :

(a) un **jeu équitable** ssi le **processus** en temps discret $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une **martingale**, ie ssi :

$$(1) \quad E(X_{n+1} / X_n) = X_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* ;$$

(b) un **jeu non équitable** ssi le **processus** en temps discret $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une **semi-martingale**, ie ssi :

$$(2) \quad E(X_{n+1} / X_n) \leq X_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(ii) On montre qu'il n'existe pas de **système de paris** (ie de **suite** extraite de X) tq un jeu non équitable devienne équitable (cf **théorème d'impossibilité des systèmes**).

(iii) En pratique, les jeux concrets sont non équitables, en raison de diverses intermédiations (prélèvements fiscaux, commission pour frais de gestion de la banque ou du casino, etc), qui introduisent ipso facto une différence entre les mises et le « retour de jeu » (gain). Par ailleurs, la banque peut aussi « sauter », la fortune du banquier étant, en pratique, limitée.