JEU STATISTIQUE SÉQUENTIEL (A14, G3, G7)
(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Dans un **problème statistique**, un plan d'**échantillonnage** (ou plan d'**observation**) séquentiel peut être donné a priori : il convient alors de définir une **procédure** de décision qui tienne compte de ce plan (cf **problème de décision séquentielle**).

(i) Un **jeu séquentiel à horizon fini** (ou **horizon tronqué**), ou simplement **jeu séquentiel fini** (ou **tronqué**), consiste en la donnée (D. BLACKWELL - M.A. GIRSHICK) :

(a) d'un **modèle statistique** de base $(\Omega, \mathcal{T}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$;

(b) d'un **espace d'observation**, ou **espace d'échantillonnage**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ qui se présente sous la forme d'un produit défini par $\mathcal{X} = \prod_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n$, $\mathcal{B} = \otimes_{n=1}^{N} \mathcal{B}_n$ et $N \in \mathbf{N}^*$. Les ensembles sont souvent identiques : $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_0$ et $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_0$, $\forall$ n = 1 ,..., N ;

(c) d'une **variable aléatoire** (en général, un **échantillon** observable) $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ de la forme $X = (X_1 ,..., X_N)$, dont la **loi de probabilité** est notée P_θ^X (pour tout $\theta \in \Theta$, P_θ^X est l'image de P_θ par X) ;

(d) d'un **ensemble de décisions finales**, ou **ensemble de décisions terminales**, D dont l'élément générique d est appelé **décision finale**, ou **décision terminale**. On parle aussi d'**action finale** ou d'**action terminale**, auquel cas on note $a \in A$;

(e) d'un ensemble Δ de fonctions $\delta : N_N \times \mathcal{X} \mapsto D$, avec $N_N = \{0, 1,..., N\}$. Ces fonctions sont tq :

(1) $\quad (x', x'') \in \mathcal{X}^2$ et $x'' = x' \;\Rightarrow\; \delta(n, x') = \delta(n, x'')$,

pour tout $n \in \{1 ,..., N\}$ et toute $\delta \in \Delta$;

(f) d'une famille $\boldsymbol{\Pi}$ de **partitions** Π de $\mathcal{X}$ qui vérifient :

(2)
$$\Pi \in \boldsymbol{\Pi} \;\Rightarrow\; \Pi \text{ est de la forme } \Pi = \{\Pi_0, \Pi_1 ,..., \Pi_N\} ;$$
$$(x', x'') \in \mathcal{X}^2 \text{ et } x'' = x' \;\Rightarrow\; \{x' \in \Pi_n \Leftrightarrow x'' \in \Pi_n\}.$$

On appelle $\Delta' = \boldsymbol{\Pi} \times \Delta$ l'**ensemble des règles de décision séquentielles**, ou **ensemble des fonctions de décision séquentielles**. Un élément $\Pi \in \boldsymbol{\Pi}$ définit donc un **plan d'échantillonnage séquentiel**, ou **plan séquentiel**, dont tout élément Π_n est appelé **région d'arrêt**, ou **zone d'arrêt** ;

(g) d'une **fonction de coût** c : $N_N \times \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}_+$ tq :

(3) $(x', x'') \in \mathcal{X}^2$ et $x'' = x' \Rightarrow c(n, x') = c(n, x'')$.

Autrement dit, le coût de l'échantillonnage ne dépend que des sous-échantillons effectivement réalisés.

Il est souvent commode d'indexer c comme une suite $c = (c_n)_{n=0,1,...,N}$ tq :

(4)
$$c_0 = 0 \quad \text{(coût nul en l'absence d'observation),}$$
$$c_N : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}_+ ,$$

où $c_N = c_N(x_1, ..., x_N)$ est le coût associé à l'observation $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathcal{X}$.

De même, on indexe δ selon $\delta = (\delta_0, \delta_1, ..., \delta_N)$;

(h) d'une **fonction de perte** L : $\Theta \times D \mapsto \mathbf{R}_+$. La **fonction de risque séquentielle** associée à L s'écrit donc :

(5) $$R_\Pi(\delta, \theta) = \Sigma_{n=0}^N \int_{\Pi(n)} \{c_n(x) + L(\theta, \delta(n, x))\} \, dP_\theta^X(x),$$

en notant $\Pi(n)$ pour désigner Π_n .

Un **jeu séquentiel** fini (de « taille » N) est souvent représenté par le symbole :

(6) $$\mathcal{J}_N = \{(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}, \Delta', R\}.$$

On le considère généralement comme « plongé » dans un jeu séquentiel infini (dénombrable) $\mathcal{J}_{\mathbf{N}^*}$.

(ii) Il est possible d'étendre le cadre (classique) précédent dans un **contexte statistique** bayésien. On suppose donnée une **probabilité a priori** Π, définie sur une tribu $\mathcal{B}_\Theta$ de parties de Θ (cette probabilité est à distinguer des partitions Π de $\mathcal{X}$).

Dans ce cadre, on établit deux résultats importants :

(a) quelle que soit la partition $\Pi \in \mathbf{\Pi}$ et que soit la probabilité a priori Π sur $\mathcal{B}_\Theta$, il existe une procédure de décision terminale $(\delta_n^*)_n$ qui est optimale pour la fonction de risque précédente. Autrement dit, il existe une suite de fonctions de décision terminales $(\delta_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ tq :

(7) $$\lim_n R_\Pi^\Pi(\delta_n^*) = \inf_{\delta \in \Delta} R_\Pi^\Pi(\delta) \text{ uniformément sur } \Pi,$$

où l'on a défini, au préalable, le **risque bayésien** (ou **risque de BAYES**) **séquentiel** selon la formule :

(8) $R_{\Pi}^{\Pi}(\delta) = \Sigma_{n=0}^{N} \int_{\Pi(n)} \int_{\Theta} \{c_n(x) + L(\theta, \delta(n, x)\} dP_{\theta}^{X}(x)\, d\Pi(\theta)$;

(b) quelle que soit la **probabilité a priori** Π sur $\mathcal{B}_{\Theta}$, il existe un plan d'échantillonnage séquentiel Π^* qui est optimal. Il consiste en la procédure suivante : à chaque étape $N \in$ **N***, si l'étape suivante N+1 réduit le risque, on poursuit l'échantillonnage (sinon, on l'arrête).

La théorie de la décision séquentielle, basée sur des jeux séquentiels est aussi à l'origine d'un autre résultat important : l'**identité de WALD**.