LEMME DE BRAY-HELLY (A5, C5)
(13 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **lemme de BRAY - HELLY** relie la **convergence simple** (presque partout) des **fonctions de répartition** à la convergence (simple) des **intégrales** (**espérances mathématiques**) de fonctions continues bornées (cf **application continue**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **vecteurs aléatoires** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ dont les **lp** resp $P^{X(n)}$ admettent les **fr** F_n ($\forall$ n $\in$ **N**). Soit, d'autre part, $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^K)$ l'espace des **fonction numérique** continues bornées $h : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}$.

Alors, si la suite $F = (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des fr tend, au sens de la convergence simple λ_K-presque-partout, vers une fr F_∞ , la suite des intégrales (ou espérances mathématiques) $\int h \, dF_n$ admet pour limite l'intégrale (ou espérance mathématique) $\int h \, d(\lim_n F_n)$.

(ii) Autrement dit, le **lemme de H.E. BRAY-E. HELLY** se résume dans l'implication :

$$(1) \qquad F_n \to_{n \to +\infty} F_\infty \ (\lambda_K\text{-p.p.}) \Rightarrow \int h \, dF_n \to_{n \to +\infty} \int h \, dF_\infty , \ \forall h \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}^K).$$

Si l'on pose, $\forall$ n $\in$ $\overline{\mathbf{N}}$:

$$(2) \qquad E_n h(\xi) = \int h(x) \, dF_n(x),$$

la propriété (1) s'écrit aussi :

$$(3) \qquad F_n \to_{n \to +\infty} F_\infty \ (\lambda_K\text{-p.p.}) \Rightarrow E_n h(\xi) \to_{n \to +\infty} E_\infty h(\xi), \ \forall h \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}^K).$$