LEMME DE FATOU (A5, C1, C5, E)
(19 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Ce lemme, aussi appelé **théorème de P. FATOU - H.L. LEBESGUE**, est classique en **théorie de l'intégration** et dans l'étude des **suites** de **variables aléatoires**.

(i) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un **espace mesuré** et $\mathscr{M}(E, \overline{\mathbf{R}}_+)$ l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ (cf **application mesurable**). Alors, pour toute **suite** $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}(E, \overline{\mathbf{R}}_+)$, on a les **inégalités de P. FATOU** :

(1) $\lim_n \inf \int^* f_n \, d\mu \geq \int^* \lim_n \inf f_n \, d\mu$,

où $\int^*$ représente l'intégrale supérieure (cf **intégrale**) et :

(2) $\lim_n \inf \int f_n \, d\mu \geq \int \lim_n \inf f_n \, d\mu$.

(ii) Plus généralement, soit $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : E \mapsto \overline{\mathbf{R}}$. Alors, si les deux conditions suivantes :

(a) f est minorée μ-p.p. par une **fonction intégrable** g : $f_n \geq g$, μ-p.p., $\forall n \in \mathbf{N}$;

(b) $\lim_n \inf \int f_n \, d\mu < \infty$;

sont vérifiées, l'**inégalité de P. FATOU** (2) vaut encore.

(iii) De même, si $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions mesurables $f_n : E \mapsto \overline{\mathbf{R}}$, la condition suivante :

(3) $\exists g \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ tq $f_n \leq g$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

entraîne l'**inégalité de P. FATOU « duale »** suivante :

(4) $\lim_n \sup \int f_n \, d\mu \leq \int \lim_n \sup f_n \, d\mu$.

(iv) De façon plus compacte, si $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $g' : E \mapsto \overline{\mathbf{R}}$ (resp $g'' : E \mapsto \overline{\mathbf{R}}_+$) une fonction μ-intégrable et $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables, alors les **inégalités de P. FATOU** s'écrivent :

(5) $g' \leq f_n, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \int \lim_n \inf f_n \, d\mu \leq \lim_n \inf \int f_n \, d\mu$

et :

(6) $f_n \leq g'', \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \lim_n \sup \int f_n \, d\mu \leq \int \lim_n \sup f_n \, d\mu$.