LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS (A10)
(27 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Soit E un **ensemble** et $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **fonctions numériques** $f_n : E \mapsto \overline{\mathbf{R}}$.

(i) On appelle :

(a) **limite supérieure** de f la fonction f_S définie par :

$(1)_S \quad f_S = \lim_k \downarrow \sup_{n \geq k} f_n = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$.

Cette limite f_S est souvent notée $\lim_k \sup f_k$ ou $\overline{\lim}\, f_k$ (avec $k \in \mathbf{N}$) ;

(b) **limite inférieure** de f la fonction f_I définie par :

$(1)_I \quad f_I = \lim_k \uparrow \inf_{n \geq k} f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$.

Cette limite f_I est souvent notée $\lim_k \inf f_k$ ou $\underline{\lim}\, f_k$ (avec $k \in \mathbf{N}$).

(ii) Ces deux limites vérifient la propriété suivante :

(2) $\quad \lim_n \inf f_n \leq \lim_n \sup f_n$.

Lorsque l'égalité est réalisée dans (2), on définit une **suite convergente** f et sa **limite** est la valeur, simplement notée $\lim_n f_n$, ou f_∞ , commune à $\lim_n \inf f_n$ et à $\lim_n \sup f_n$ (cf **convergence simple**).

(iii) Les notions précédentes peuvent être comparées à celle de **limite ensembliste**.