LIMITE ENSEMBLISTE (A2)
(06 / 06 / 2019)

(i) Soit $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **parties** d'un **ensemble** E donné et $k \in \mathbf{N}$.

Lorsque $k \in \mathbf{N}$ tend vers l'infini, on appelle :

(a) **limite supérieure** de A l'ensemble A_S constitué des points de E qui appartiennent à une infinité de **parties** A_k , ie :

(1) $$A_S = \cup_{k \in \mathbf{N}} (\cap_{n \geq k} A_n) = \{x \in E : \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{1}(A_n (x)) = +\infty\}.$$

Cette limite A_S se note aussi $\lim_k \sup A_k$ ou $\overline{\lim}\, A_k$;

(b) **limite inférieure** de A l'ensemble A_I constitué des points de E qui appartiennent à toutes les parties A_k au-delà d'un certain rang (qui dépend, en général, de chaque point $x \in E$), ie qui appartiennent à toutes les parties A_k sauf au plus à un nombre fini d'entre elles :

(2) $$A_I = \cap_{k \in \mathbf{N}} (\cup_{n \geq k} A_n) = \{x \in E : \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{1} (A_n^c (x) < +\infty\}.$$

Cette limite se note aussi $\lim_n \inf A_k$ ou lim_ A_k ;

(c) **limite** de A l'ensemble A_∞ , s'il existe, tq :

(3) $$A_\infty = \lim_n \sup A_n = \lim_n \inf A_n .$$

La limite A_∞ de A se note aussi $\lim_n A_n$. Lorsqu'elle existe, on dit que A est une **suite convergente**.

(ii) On établit que :

(a) toute **suite monotone de parties** est convergente. Si A est une suite croissante (ie si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$), on note aussi $\lim_n \uparrow A_n$ la limite de A ; si A est une suite décroissante (ie si $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$), on note aussi $\lim_n \downarrow A_n$ la limite de A ;

(b) si A et B sont deux suites de parties de E, alors :

(4) $$\begin{array}{lcl} \lim_n A_n = A_\infty & & \lim A_n \cup B_n = A_\infty \cup B_\infty \\ \text{et} & \Rightarrow & \text{et} \\ \lim_n B_n = B_\infty & & \lim A_n \cap B_n = A_\infty \cap B_\infty . \end{array}$$